SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Mišak

SUKLADNOST I IZOMETRIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Mea Bombardelli

Zagreb, veljača, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Sukladnost trokuta može se definirati pomoću jednakosti duljina stranica i mjera kutova. Također, sukladnost četverokuta i drugih likova mogla bi se na sličan način definirati, ali rijetko gdje se zaista tako definira. Drugi pristup je, ako znamo što je izometrija, reći da su dva lika sukladna ako postoji izometrija koja preslikava jedan na drugi.
Pojmovi sukladnost i izometrije poznati su učenicima još iz osnovne i srednje škole. Sa sukladnošću se učenici prvi puta susreću u šestom razredu osnovne škole na način da otkrivaju definiciju za sukladnost trokuta i obrađuju poučke o sukladnosti trokuta. Znanje o sukladnosti proširuju u prvom razredu srednje škole pri čemu pojam sukladnosti proširuju na dužine i kutove, dok poučke o sukladnosti trokuta pokušavaju dokazati. Pojam izometrije također obrađuju u prvom razredu srednje škole, većinom samo prirodoslovno - matematičke gimnazije, dok opće i srodne gimnazije obrađuju vrlo šturo ili uopće ne obrađuju. Prilikom obrade preslikavanja navedenih kao primjeri izometrija, dokazuju tvrdnje da je određeno preslikavanje izometrija.

U ovom radu ukratko se upoznajemo s konceptom obrade sukladnosti i izometrija u školama, dok se većina rada bazira na aksiomatskom pristupu sukladnosti i izometrijama. Glavna literatura u ovom radu je knjiga [11].

Osnovni zadatak ovog rada je proučavanje već poznatih činjenica kroz strogo aksiomatsko izlaganje pri kojem se na temelju polaznih objekata, relacija i aksioma izgrađuju nove tvrdnje. Takav način izlaganja trebao bi čitatelja uzdići na višu, apstraktniju razinu, ali isto tako osposobiti ga da se vrati na konkretan model. Osim toga, cilj je klasificirati izometrije ravnine.

U radu se koristi Hilbertov sustav aksioma. Rad se sastoji od tri poglavlja i jednog dodatka.

U prvom poglavlju opisan je način obrade sukladnosti i izometrija u osnovnoj i srednjoj školi. Poglavlje se sastoji od tri cjeline. U prvoj cjelini opisana je obrada sukladnosti trokuta, a dani su i dokazi teorema o sukladnosti trokuta. Druga cjelina govori o sukladnosti poligona. Iako se konkretno ne spominje u osnovnoj i srednjoj školi, činilo se zanimljivo promatrati sukladnost poligona koristeći znanje o sukladnosti trokuta. I na kraju, u trećoj cjelini opisana je obrada pojma izometrija u srednjoj školi.

U drugom poglavlju opisujemo aksiomatski pristup sukladnosti. U tom poglavlju definiramo pojmove i iskazujemo i dokazujemo tvrdnje potrebne za daljnji tijek ovog rada. Poglavlje se sastoji od tri cjeline. U prvoj cjelini definiramo dužinu, kut i trokut, u drugoj cjelini definiramo mjere dužina i kutova, dok u trećoj cjelini definiramo okomitost i paralelnost. Sve tvrdnje koje iskazujemo dokazujemo pomoću aksioma.

I zadnje, treće poglavlje govori o izometrijama. Poglavlje se sastoji od osam cjelina pri čemu u svakoj cjelini detaljno obrađujemo primjere izometrija kao što i iznosimo tvrdnje i posljedice vezane uz njih. Osim toga, u ovom poglavlju proučavamo sukladnost trokuta koristeći svojstva izometrija i ostale dobivene rezultate vezane uz njih. Na kraju poglavlja iznosimo kratku usporedbu između srednjoškolskih definicija i iskazanih definicija u ovom poglavlju.

Na kraju rada nalazi se dodatak koji sadrži sve Hilbertove aksiome.

Poglavlje 1

Sukladnost i izometrije u školi

1.1 Sukladnost trokuta

Sukladnost trokuta prvi puta se obrađuje u šestom razredu osnovne škole. Većinom se uvodi tako da učenici presavinu papir na pola te izrežu trokut proizvoljne veličine. Na taj način dobivaju dva trokuta koja međusobno uspoređuju. Uspoređivanjem zaključuju da su odgovarajuće duljine stranica i odgovarajuće veličine kutova promatranih trokuta jednake. Promatrane trokute mogu položiti jedan na drugi tako da se poklapaju. Time dolaze do pojma i definicije sukladnosti trokuta. Također prvi puta uvode i oznaku za sukladnost: $\cong$.

Osim definicije sukladnosti spominju i sljedeće poučke o sukladnosti trokuta:

1. Poučak SSS (stranica - stranica - stranica)
   Dva su trokuta sukladna ako se poklapaju u svim trima stranicama.

2. Poučak SKS (stranica - kut - stranica)
   Dva su trokuta sukladna ako se poklapaju u dvjema stranicama i kutu među njima.

3. Poučak KSK (kut - stranica - kut)
   Dva su trokuta sukladna ako se poklapaju u jednoj stranici i kutovima uz tu stranicu.

Učenicima su u zadacima zadani različiti trokuti za koje moraju primjenom poučaka odrediti jesu li sukladni.

U prvom razredu srednje škole detaljnije se obrađuje sukladnost trokuta. Prije same sukladnosti trokuta, prisjećaju se nekih odnosa između dužina, kutova i trokuta poznatih iz osnovne škole, a zatim definiraju sukladnost dužina i kutova.
Nakon toga detaljnije proučavaju sukladnost trokuta. U osnovnoj školi obrađuju se samo tri poučka o sukladnosti trokuta, SSS, SKS, KSK, dok se u srednjoj školi obrađuje i četvrti poučak, $SSK^{>}$.

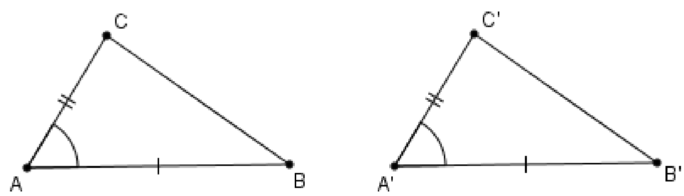
U većini udžbenika za srednje škole sukladnost trokuta definirana je ovako:

Definicija 1.1.1. *Trokuti su sukladni ako i samo ako imaju sukladne odgovarajuće stranice i sukladne odgovarajuće kutove.*

U ovoj se definiciji zahtijeva previše, a to pokazuju teoremi o sukladnosti trokuta.
U ovoj fazi školovanja učenici svaki teorem pobliže proučavaju i pokušavaju tvrdnje "dokazati". U daljnjem tekstu iznijet ćemo dokaze iz udžbenika. Valja napomenuti da ne nude svi udžbenici dokaze, već samo iskaze teorema.

Teorem 1.1.2. *$(S-K-S)$ Dva su trokuta sukladna ako su im sukladne dvije stranice i kut među njima.*

Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ takvi da je $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$, $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle B'A'C'|$.

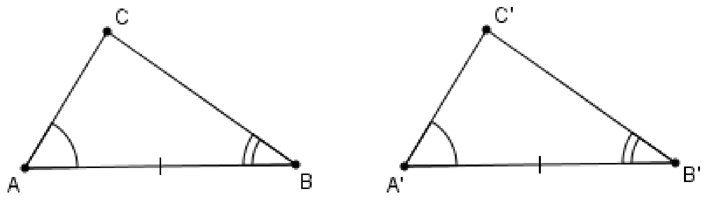


Slika 1.1: S-K-S teorem

Trokut $\triangle A'B'C'$ možemo preslikati (pomaknuti, zarotirati i po potrebi zrcaliti) tako da se stranica $\overline{A'B'}$ preklopi sa stranicom $\overline{AB}$, a vrh C' padne u neku točku C'' u poluravnini (određenoj pravcem AB) u kojoj se nalazi i vrh C. Sada je $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC''$.
Kamo može pasti točka C''?
Točka C'' mora pasti na krak AC kuta $\sphericalangle BAC$ jer se $\sphericalangle B'A'C'$ podudara s kutom $\sphericalangle BAC$. Također, jer je $|AC| = |A'C'|$, mora vrijediti $|AC| = |AC''|$. Zbog toga je $C = C''$ pa imamo $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC'' \cong \triangle ABC$ i poučak je dokazan.

Teorem 1.1.3. *$(K-S-K)$ Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne jedna stranica i dva kuta uz tu stranicu.*

Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ takvi da je $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle C'A'B'|$, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle A'B'C'|$, $|AB| = |A'B'|$.
Preslikajmo izometrijom trokut $\triangle A'B'C'$ tako da mu stranica $\overline{A'B'}$ padne na stranicu $\overline{AB}$, a točka C' u neku točku C'' u poluravnini (određenoj pravcem AB) u kojoj se nalazi i točka C. Sada je $\triangle A'B'C \cong \triangle ABC''$.
Kamo mora pasti točka C''?

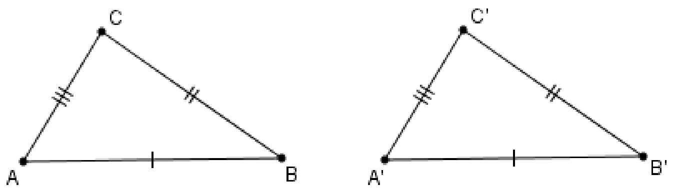


Slika 1.2: *K-S-K teorem*

Točka C'' mora pasti na krak AC kuta $\sphericalangle CAB$ jer se kut $\sphericalangle C'A'B'$ podudara s kutom $\sphericalangle CAB$. Također, jer se kutovi $\sphericalangle A'B'C'$ i $\sphericalangle ABC$ podudaraju, točka C'' mora pasti na krak BC kuta $\sphericalangle ABC$. Kako se ta dva kraka sijeku u točki C, mora vrijediti $C'' = C$ pa imamo $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC'' \cong \triangle ABC$ i time je poučak dokazan.

Teorem 1.1.4. *($S - S - S$) Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne sve tri stranice.*

Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ takvi da je $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$ i $|BC| = |B'C'|$.

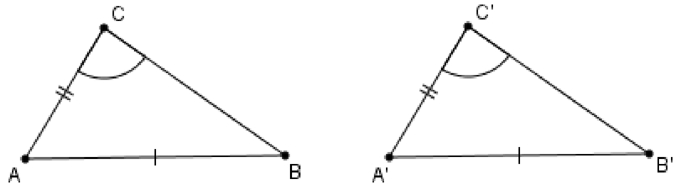


Slika 1.3: *S-S-S teorem*

Stranica $\overline{A'B'}$ sukladna je stranici $\overline{AB}$ pa trokut $\triangle A'B'C'$ možemo preslikati izometrijom tako da se te dvije stranice poklope, a vrh C' padne u neku točku C'' u poluravnini (određenoj pravcem AB) u kojoj se nalazi i vrh C. Sada je $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC''$.
Gdje se može nalaziti C''?
Budući da je $|BC| = |B'C'|$, ona mora ležati na kružnom luku sa središtem u točki B i polumjerom $|BC|$ (taj luk prolazi točkom C). Također, zbog $|AC| = |A'C'|$, točka C'' mora ležati i na kružnom luku sa središtem u točki A i polumjerom $|AC|$ (i taj luk prolazi točkom C). Ta se dva luka u ovoj poluravnini sijeku samo u točki C pa je $C = C''$.
Sada je $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC'' \cong \triangle ABC$ i poučak je dokazan.

Teorem 1.1.5. *($S - S - K^{>}$) Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne dvije stranice i kut nasuprot veće stranice.*

Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ takvi da je $|AB| > |AC|$, $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$, $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle B'C'A'|$.



Slika 1.4: *S-S-K*$^{>}$ *teorem*

Preslikajmo izometrijom trokut $\triangle A'B'C'$ tako da mu se stranica $\overline{A'C'}$ poklopi sa stranicom $\overline{AC}$, a točka B' padne u neku točku B'' u poluravnini (određenoj pravcem AC) u kojoj se nalazi i vrh B. Sada je $\triangle A'B'C' \cong \triangle AB''C$.
Gdje se nalazi točka B''?
Ona leži na kraku CB kuta $\sphericalangle BCA$ jer se kutovi $\sphericalangle B'C'A'$ i $\sphericalangle BCA$ podudaraju. Kako je $|A'B'| = |AB|$, njezina udaljenost od vrha A jednaka je $|AB|$ pa točka B'' leži na luku kružnice sa središtem u A i polumjerom $|AB|$. Taj luk siječe krak CB samo u točki B pa mora vrijediti $B'' = B$.
Dakle, $\triangle A'B'C' \cong \triangle AB''C \cong \triangle ABC$ i time je poučak dokazan.

Tako se ovi teoremi dokazuju u udžbeniku [3]. U drugom dijelu rada navedene teoreme dokazat ćemo koristeći aksiome.

1.2 Sukladnost poligona

Kao što smo definirali sukladnost trokuta, možemo zaključiti da bismo na sličan način mogli definirati sukladnost poligona. No u udžbenicima za osnovnu i srednju školu to se ne spominje.

Definicija 1.2.1. *Dva poligona su sukladna ako su im sukladne odgovarajuće stranice i sukladni odgovarajući kutovi.*

Kao i kod sukladnosti trokuta, i u ovoj definiciji zahtijeva se previše, a o tome nam govore teoremi o sukladnosti poligona.

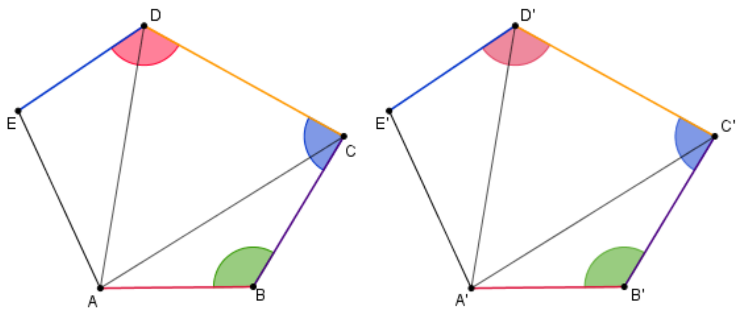
Teorem 1.2.2. *(Prvi teorem o sukladnosti poligona.) Dva poligona za koje su redom pridružene stranice i kutovi sukladni, s izuzetkom jedne stranice i dva toj stranici priležeća kuta, su sukladna.*

Dokaz. Dokaz ćemo provesti za peterokut. Analognim postupkom mogli bismo dokazati ovaj teorem za bilo koji n-terokut.

Teorem ćemo dokazati primjenom teorema o sukladnosti trokuta.
Neka su peterokuti $ABCDE$ i $A'B'C'D'E'$ takvi da je

$$|AB| = |A'B'|, \quad |BC| = |B'C'|, \quad |CD| = |C'D'|, \quad |DE| = |D'E'|,$$

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle A'B'C'|, \quad |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle B'C'D'|, \quad |\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle C'D'E'|.$$



Slika 1.5: $ABCDE$ i $A'B'C'D'E'$

Iz $|AB| = |A'B'|$, $|BC| = |B'C'|$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle A'B'C'|$, prema Teoremu 1.1.2, slijedi

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

pa je

$$|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle B'C'A'|, \quad |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle B'A'C'| \quad \text{i} \quad |AC| = |A'C'|.$$

Iz $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle B'C'D'|$ i $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle B'C'A'|$ slijedi

$$|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle A'C'D'|.$$

Tada iz $|AC| = |A'C'|$, $|CD| = |C'D'|$ i $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle A'C'D'|$, a prema Teoremu 1.1.2 slijedi

$$\triangle ACD \cong \triangle A'C'D'$$

pa je

$$|\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle C'D'A'|, \quad |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle D'A'C'| \quad \text{i} \quad |AD| = |A'D'|.$$

Analogno vrijedi i da je $\triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$ pa je

$$|AE| = |A'E'|, \quad |\sphericalangle DEA| = |\sphericalangle D'E'A'| \quad \text{i} \quad |\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle E'A'D'|.$$

Zbog

$$|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle EAB|$$

i

$$|\sphericalangle B'A'C'| + |\sphericalangle C'A'D'| + |\sphericalangle D'A'E'| = |\sphericalangle E'A'B'|$$

te zbog

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle B'A'C'|, \quad |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle C'A'D'| \quad \text{i} \quad |\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle D'A'E'|$$

slijedi

$$|\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle E'A'B'|.$$

Iz $|AE| = |A'E'|$, $|\sphericalangle DEA| = |\sphericalangle D'E'A'|$ i $|\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle E'A'B'|$ i iz uvjeta teorema zaključujemo da su peterokuti sukladni, tj.

$$ABCDE \cong A'B'C'D'E'.$$

□

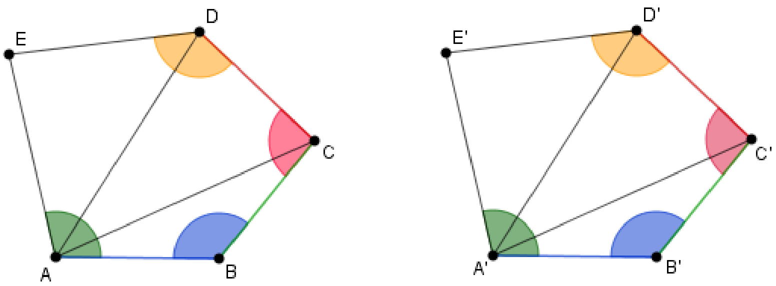
Teorem 1.2.3. *(Drugi teorem o sukladnosti poligona.) Dva poligona kojima su redom pridružene stranice i kutovi sukladni, s izuzetkom dvije susjedne stranice i kutom među njima, su sukladni.*

Dokaz. I ovaj dokaz provest ćemo za peterokut. Analognim postupkom mogli bismo ovaj teorem dokazati za bilo koji n-terokut.

I ovaj teorem dokazat ćemo primjenom teorema o sukladnosti trokuta.
Neka su peterokuti $ABCDE$ i $A'B'C'D'E'$ takvi da je

$$|AB| = |A'B'|, \quad |BC| = |B'C'|, \quad |CD| = |C'D'|,$$

$$|\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle E'A'B'|, \quad |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle A'B'C'|, \quad |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle B'C'D'|, \quad |\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle C'D'E'|.$$



Slika 1.6: $ABCDE$ i $A'B'C'D'E'$

Iz $|AB| = |A'B'|$, $|BC| = |B'C'|$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle A'B'C'|$, prema Teoremu 1.1.2, slijedi

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

pa je

$$|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle B'C'A'|, \quad |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle C'A'B'| \quad \text{i} \quad |AC| = |A'C'|.$$

Iz $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle B'C'D'|$ i $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle B'C'A'|$ slijedi

$$|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle A'C'D'|.$$

Tada iz $|AC| = |A'C'|$, $|CD| = |C'D'|$ i $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle A'C'D'|$, a prema Teoremu 1.1.2 slijedi

$$\triangle ACD \cong \triangle A'C'D'$$

pa je

$$|\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle C'D'A'|, \quad |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle D'A'C'| \quad \text{i} \quad |AD| = |A'D'|.$$

Iz $|\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle C'D'E'|$ i $|\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle C'D'A'|$ slijedi

$$|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle A'D'E'|,$$

dok iz $|\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle E'A'B'|$, $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle C'A'B'|$ te $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle D'A'C'|$ slijedi

$$|\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle E'A'D'|.$$

Iz $|AD| = |A'D'|$, $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle A'D'E'|$ i $|\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle E'A'D'|$, a prema Teoremu 1.1.3 slijedi

$$\triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$$

pa je

$$|DE| = |D'E'|, \quad |EA| = |E'A'| \quad \text{i} \quad |\sphericalangle DEA| = |\sphericalangle D'E'A'|.$$

Iz $|DE| = |D'E'|$, $|EA| = |E'A'|$ i $|\sphericalangle DEA| = |\sphericalangle D'E'A'|$ i iz uvjeta teorema zaključujemo da su peterokuti sukladni, tj.

$$ABCDE \cong A'B'C'D'E'.$$

□

Također, primjenom teorema o sukladnosti trokuta, dokazuje se:

Korolar 1.2.4. *Ako su dva poligona sukladna, tada su sukladne i njihove odgovarajuće dijagonale.*

Korolar 1.2.5. *Dva poligona za koje su redom pridružene stranice i dijagonale sukladne su sukladna.*

Iako je moguće proučavati sukladnost likova primjenom sukladnosti dužina (stranica i dijagonala), sukladnosti kutova i sukladnosti trokuta, opisani pristup sukladnosti likova rijetko gdje se koristi. Drugi, mnogo praktičniji pristup je korištenje pojma izometrije.

1.3 Izometrije ravnine

Pojam izometrije ravnine, naravno, u osnovnoj školi se ne pojavljuje, no obrađuju se primjeri izometrija ravnine: translacija, osna simetrija, centralna simetrija te rotacija.
Tako se osna simetrija prvi puta pojavljuje već u petom razredu osnovne škole. Proučavaju se osnosimetrični likovi u prirodi (npr. leptirova krila) te se proučavanjem takvih likova otkrivaju neka svojstva osne simetrije. Pri definiciji osne simetrije koristi se pojam simetrale dužine. Konstruiraju se osnosimetrične točke te se crtaju osnosimetrične slike, a otkrivaju i da su osnosimetrične dužine jednake duljine. Osim toga proučavaju se osnosimetrični likovi.

U osmom razredu navedeni primjeri obrađuju se u nastavnoj cjelini "Preslikavanje ravnine". Tu se i prvi puta spominje pojam preslikavanja ravnine te je dana sljedeća definicija:

Definicija 1.3.1. *Kad svakoj točki T ravnine pridružimo po nekom pravilu neku točku T', tada govorimo o preslikavanju ravnine. Točku T' zovemo slikom točke T po preslikavanju f i bilježimo je $T' = f(T)$.*

Kod translacije, osne simetrije, centralne simetrije i rotacije posebno spominju da navedena preslikavanja čuvaju udaljenosti, tj. dužine preslikavaju u sukladne dužine, pravce u pravce te kutove u sukladne kutove.

U udžbenicima za opće gimnazije pojam izometrije ravnine spominje se samo u nekim udžbenicima, i to vrlo šturo. Izometrije ravnine obrađuju se samo u prirodoslovno - matematičkim gimnazijama i definiraju se na sljedeći način:

Definicija 1.3.2. *Preslikavanje $f : M \to M$ zovemo izometrija ravnine M ako za sve točke A i B te ravnine vrijedi:*

$$|A'B'| = |AB|$$

gdje su A' i B' slike točaka A i B, tj. $f(A) = A'$ i $f(B) = B'$.

Nakon toga slijedi obrada osne simetrije, centralne simetrije, rotacije i translacije. Uglavnom su navedena preslikavanja definirana ovako:

Definicija 1.3.3. *Neka je s neki pravac ravnine M.*
Preslikavanje ravnine $f : M \to M$, koje svakoj točki T ravnine M pridružuje njoj simetričnu točku T' s obzirom na pravac s, zovemo osna simetrija s obzirom na pravac s.

Napomena. Prije definicije osne simetrije komentira se kada su dvije točke simetrične s obzirom na neki pravac.

Definicija 1.3.4. *Neka je S neka točka ravnine M.*
Preslikavanje ravnine $f : M \to M$, koje svakoj točki T ravnine M pridružuje njoj centralno simetričnu točku T' s obzirom na točku S, zovemo centralna simetrija s obzirom na točku S.

Napomena. Prije definicije centralne simetrije komentira se kada su dvije točke centralno simetrične s obzirom na neku točku.

Definicija 1.3.5. *Rotacija oko točke S za kut φ je preslikavanje ravnine pri kojem se svakoj točki T pridružuje točke T' takva da je:*

1) $|ST'| = |ST|$,

2) $\sphericalangle TST' = \varphi$.

Drugim riječima, točke T i T' leže na istoj kružnici sa središtem u točki S, a polupravci ST i ST' zatvaraju kut φ.
Točka T može biti rotirana oko točke S za kut φ u suprotnom smjeru od gibanja kazaljke na satu. Tada kažemo da je rotacija izvršena u pozitivnom smjeru za kut φ.
Ako točku T rotiramo oko točke S za kut φ u smjeru gibanja kazaljke na satu, tada kažemo da je rotacija izvršena u negativnom smjeru i kut rotacije često označavamo sa $-\varphi$.

Definicija 1.3.6. *Neka je zadana orijentirana dužina $\overrightarrow{AB}$.*
Translacija je preslikavanje ravnine $f : M \to M$ koje točku T preslikava u točku T' na sljedeći način:

1) Točkom T povučemo paralelu p sa AB.

2) Točku T' dobivamo tako da na pravac p od točke T nanesemo orijentiranu dužinu $\overrightarrow{AB}$.

Napomena. Prije definicije translacije uvodi se pojam orijentirane dužine ili vektora.

Nakon definiranja osne simetrije, centralne simetrije, rotacije i translacije dokazuju da su navedena preslikavanja izometrije. Neki udžbenici daju definiciju fiksne točke te se komentira koja ih preslikavanja imaju. Zadaci koji se pojavljuju u udžbenicima većinom su konstrukcijski.

Zanimljivo je da se u nekim udžbenicima prije sukladnosti trokuta spominje preslikavanje ravnine te se definira pojam izometrije ravnine. Navode se i translacija, rotacija i osna simetrija kao primjeri izometrija. Nakon toga slijedi ova definicija sukladnosti likova:

Definicija 1.3.7. *Lik L sukladan je liku L' ako postoji izometrija koja lik L preslikava na lik L'.*

Proučavajući udžbenike koji su aktualni tijekom zadnjih nekoliko godina u nastavi matematike, može se zaključiti da se ipak sukladnost i izometrije obrađuju kao zasebni pojmovi. Nakon obrade izometrija ne donosi se jasan zaključak o njihovoj povezanosti.

Poglavlje 2

Aksiomatski pristup sukladnosti

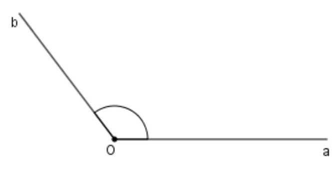
Geometrija se zasniva na pojmovima koji se ne definiraju i tvrdnjama koje se ne dokazuju te se pomoću njih definiraju svi ostali pojmovi i izvode i dokazuju sve moguće tvrdnje. Tvrdnje koje se smatraju točne i ne dokazuju se nazivaju se aksiomima. U ovom radu koristi se Hilbertov sustav aksioma kroz koji se promatraju već otprije poznati pojmovi i tvrdnje, naučeni još u osnovnoj i srednjoj školi. Hilbertovi aksiomi navode se u dodatku na kraju rada.

2.1 Sukladnost dužina i kutova

Definicija 2.1.1. *Neka su u ravnini dane točke A, B i T. Skup svih točaka T za koje je $(A - T - B)$ nazivamo dužinom i pišemo $\overline{AB}$.*

Ako je $(A - T - B)$, prema aksiomu II_2 slijedi da je također i $(B - T - A)$. Zbog toga dužinu $\overline{AB}$ možemo označavati i s $\overline{BA}$.

Definicija 2.1.2. *Kut je par polupravaca $\{a, b\}$ s istim početkom O i koji ne leže na istom pravcu. Kut označavamo s $\sphericalangle ab$, $\sphericalangle ba$, $\sphericalangle aOb$, $\sphericalangle bOa$.*



Slika 2.1: Kut

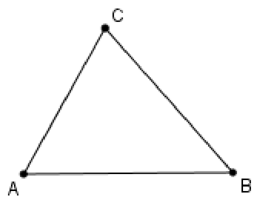
Definicija 2.1.3. *Polupravci a i b nazivaju se krakovima kuta, a točka O vrhom kuta.*

Ako je točka A na kraku a, a točka B na kraku b, tada kut možemo označavati s $\sphericalangle AOB$ ili $\sphericalangle BOA$.

Definicija 2.1.4. *Neka su A, B i C tri nekolinearne točke, te neka je α_A poluravnina s rubom BC koja sadrži točku A, α_B poluravnina s rubom AC koja sadrži točku B i α_C poluravnina s rubom AB koja sadrži točku C. Skup $\alpha_A \cap \alpha_B \cap \alpha_C$ čini trokut koji označavamo $\triangle ABC$.*

Definicija 2.1.5. *Točke A, B i C nazivaju se vrhovi trokuta, dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ stranice trokuta, a $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle CBA$ kutovi trokuta.*

Definicija 2.1.6. *Skup $(\alpha_A \cap \alpha_B \cap \alpha_C)\backslash(\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA})$ nazivamo unutarnjim područjem trokuta $\triangle ABC$.*



Slika 2.2: Trokut $\triangle ABC$

Prema aksiomu III_1 za svaki polupravac a' s početnom točkom A' i za svaku dužinu $\overline{AB}$ postoji točka $B' \in a'$ takva da je dužina $\overline{AB}$ sukladna s dužinom $\overline{A'B'}$. Pišemo $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.

Teorem 2.1.7. *Sukladnost dužina je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Da bismo to dokazali, moramo dokazati da je sukladnost dužina refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija.
1° *refleksivnost*
Promotrimo dužinu $\overline{AB}$ i neka je A' bilo koja točka i a' bilo koji polupravac s početnom točkom A'. Na temelju aksioma III_1 postoji točka $B' \in a'$ takva da je

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}. \tag{2.1}$$

Koristeći aksiom III_2,

$$(\overline{A'B'} \cong \overline{AB} \wedge \overline{A''B''} \cong \overline{AB}) \Rightarrow \overline{A'B'} \cong \overline{A''B''},$$

i (2.1), imamo

$$(\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \wedge \overline{AB} \cong \overline{A'B'}) \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{AB},$$

čime je dokazana refleksivnost relacije.
2° *simetričnost*

Simetričnost relacije dokazuje se pomoću refleksivnosti i aksioma III_2. Imamo:

$$(\overline{AB} \cong \overline{AB} \wedge \overline{A'B'} \cong \overline{AB}) \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{A'B'}.$$

Dakle,

$$\overline{A'B'} \cong \overline{AB} \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{A'B'},$$

tj. sukladnost dužina je simetrična relacija.

3° *tranzitivnost*

Neka je

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \wedge \overline{A'B'} \cong \overline{A''B''}.$$

Kako vrijedi

$$\overline{A'B'} \cong \overline{A''B''} \Rightarrow \overline{A''B''} \cong \overline{A'B'},$$

imamo

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \wedge \overline{A''B''} \cong \overline{A'B'}.$$

Primjenjujući aksiom III_2, slijedi $\overline{AB} \cong \overline{A''B''}$, tj. sukladnost dužina je tranzitivna relacija. S obzirom na to da smo pokazali refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost relacije, zaključujemo da je sukladnost dužina relacija ekvivalencije. □

Teorem 2.1.8. *Točka B' iz aksioma III_1 jednoznačno je određena.*

Dokaz. Pretpostavimo da polupravac a' s početnom točkom A' sadrži dvije točke B' i B'' takve da je

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \quad \text{i} \quad \overline{AB} \cong \overline{A'B''}. \tag{2.2}$$

Tada je, prema aksiomu III_1 i aksiomu III_2,

$$\overline{A'B'} \cong \overline{A'B''}.$$

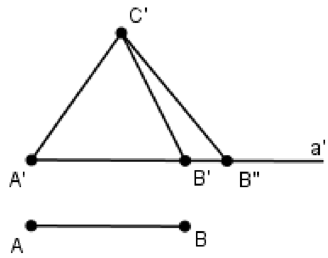
Neka $C' \notin A'B'$. Trokuti $\triangle A'B'C'$ i $\triangle A'B''C'$ su takvi da je

$$\overline{A'B'} \cong \overline{A'B''}, \quad \overline{A'C'} \cong \overline{A'C'} \quad \text{i} \quad \sphericalangle C'A'B' \cong \sphericalangle C'A'B''$$

pa, prema aksiomu III_5, slijedi

$$\sphericalangle A'C'B' \cong \sphericalangle A'C'B''.$$

No kako točke B' i B'' pripadaju istom polupravcu s početnom točkom A', polupravci $C'B'$ i $C'B''$ s početnom točkom C' nalaze se u istoj poluravnini čiji je rub $A'C'$, a to je u suprotnosti s aksiomom III_4. Dakle, polupravac a' ne može sadržavati dvije različite točke B' i B'' tako da je zadovoljen uvjet (2.2). Dakle, vrijedi $B' = B''$. □



Slika 2.3: Dokaz Teorema 2.1.8

Teorem 2.1.8 dopuna je aksiomu III_1.

Iskažimo još i sljedeći teorem:

Teorem 2.1.9. *Neka je* $(A - C - B)$ *i* $(A' - C' - B')$*. Tada*

$$(\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \wedge \overline{AC} \cong \overline{A'C'}) \Rightarrow \overline{BC} \cong \overline{B'C'}.$$

Dokaz. Prema aksiomu III_1 polupravac $C'B'$ s početkom u točki C' sadrži točku B'' takvu da je

$$\overline{CB} \cong \overline{C'B''}.$$

Tada je

$$(A - C - B) \quad \text{i} \quad (A' - C' - B'')$$

pa je, na temelju aksioma III_3,

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B''}.$$

Međutim, to je u suprotnosti s Teoremom 2.1.8 jer je prema uvjetu teorema

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'},$$

a točke B' i B'' pripadaju istom polupravcu s početkom u točki A'. Dakle, mora vrijediti $B' = B''$ te iz toga slijedi

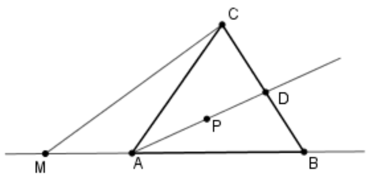
$$\overline{CB} \cong \overline{C'B'}.$$

□

Teorem 2.1.10. *Ako je P točka u unutrašnjosti trokuta $\triangle ABC$, tada postoji točka D takva da je*

$$AP \cap \overline{BC} = \{D\},$$

gdje je AP polupravac s početkom u točki A.



Slika 2.4: Teorem 2.1.10

Dokaz ovog teorema proveli bismo primjenjujući aksiom II_4 na točke C, M, B i pravac AP (vidi Sliku 2.4).

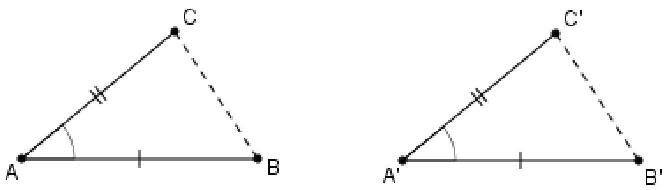
U skupu kutova relacija sukladnosti je relacija ekvivalencije. Da bismo to dokazali, potrebno je prvo iskazati i dokazati nekoliko pomoćnih teorema.

Lema 2.1.11. *Neka su zadani trokuti ABC i $A'B'C'$. Ako*

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \quad i \quad \sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C'A'B',$$

onda je i

$$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}.$$



Slika 2.5: Lema 2.1.11

Dokaz. Pretpostavimo da dužina $\overline{BC}$ nije sukladna s dužinom $\overline{B'C'}$. Tada, iz III_1, polupravac $B'C'$ s početkom u točki B' sadrži točku $C'' \neq C'$ takvu da je $\overline{BC} \cong \overline{B'C''}$. Kako iz uvjeta leme i aksioma III_5 slijedi $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$ i kako se $\sphericalangle A'B'C'$ podudara s $\sphericalangle A'B'C''$, to se aksiom III_5 može primijeniti i na trokute $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C''$. Dakle, iz $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C''}$ te $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C''$ slijedi

$$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C''A'B'. \tag{2.3}$$

S druge strane, prema uvjetu leme je

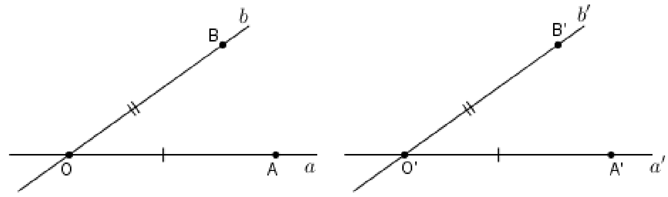
$$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C'A'B'. \tag{2.4}$$

Kako su $A'C'$ i $A'C''$ dva različita polupravca koji su sadržani u istoj poluravnini čiji je rub $A'B'$, relacije (2.3) i (2.4) su u suprotnosti s aksiomom III_4. Dakle, $C' = C''$, a to znači da je $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$. □

Lema 2.1.12. *Neka je $\sphericalangle ab \cong \sphericalangle a'b'$. Neka je c polupravac čija je početna točka O vrh kuta $\sphericalangle ab$ i neka je sadržan u unutarnjem području tog kuta. Tada postoji jedan i samo jedan poluravac c' čija je početna točka O' vrh kuta $\sphericalangle a'b'$ i koji je sadržan u unutarnjem području $\sphericalangle a'b'$, takav da je $\sphericalangle ac \cong \sphericalangle a'c'$ i $\sphericalangle cb \cong \sphericalangle c'b'$.*

Dokaz. Neka su $A \in a$, $B \in b$. (Slika 2.6) Tada, prema aksiomu III_1, postoje $A' \in a'$, $B' \in b'$ takve da je

$$\overline{OA} \cong \overline{O'A'}, \quad \overline{OB} \cong \overline{O'B'}. \tag{2.5}$$



Slika 2.6: Dokaz Leme 2.1.12 (1)

Iz (2.5) i $\sphericalangle ab \cong \sphericalangle a'b'$, a prema Lemi 2.1.11 slijedi

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'},$$

dok prema aksiomu III_5 slijedi:

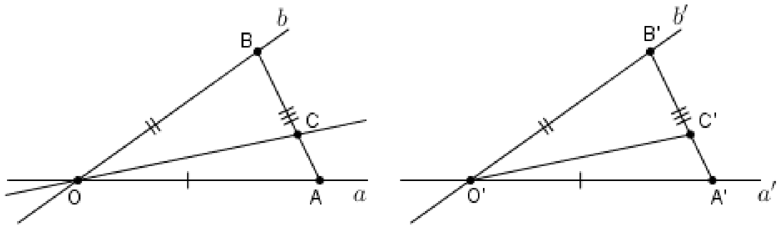
$$\sphericalangle OAB \cong \sphericalangle O'A'B' \quad \text{i} \quad \sphericalangle OBA \cong \sphericalangle O'B'A'.$$

Prema Teoremu 2.1.10 postoji točka C (Slika 2.7) takva da je

$$AB \cap c = \{C\}.$$

Prema aksiomu III_1 pravac $A'B'$ sadrži točku C' takvu da je $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, a prema Teoremu 2.1.9 tada slijedi $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.
Uočimo trokute $\triangle OAC$ i $\triangle O'A'C'$. Iz $\overline{OA} \cong \overline{O'A'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ i $\sphericalangle OAB \cong \sphericalangle O'A'B'$, a prema aksiomu III_5 slijedi:

$$\sphericalangle AOC \cong \sphericalangle A'O'C',$$



Slika 2.7: Dokaz Leme 2.1.12 (2)

tj.

$$\sphericalangle ac \cong \sphericalangle a'c'.$$

Analogno, primjenjujući aksiom III_5 na trokute $\triangle OCB$ i $\triangle O'C'B'$, slijedi:

$$\sphericalangle cb \cong \sphericalangle c'b',$$

čime je postojanje takvog polupravca dokazano.
Jedinstvenost polupravca c' posljedica je aksioma III_4. □

Lema 2.1.13. *Neka je c polupravac čija je početna točka O vrh $\sphericalangle ab$ i neka je sadržan u unutarnjem području tog kuta. Neka je c' polupravac čija je početna točka O' vrh $\sphericalangle a'b'$ i neka je i on sadržan u unutarnjem području $\sphericalangle a'b'$. Tada:*

$$(\sphericalangle ac \cong \sphericalangle a'c' \wedge \sphericalangle cb \cong \sphericalangle c'b') \Rightarrow \sphericalangle ab \cong \sphericalangle a'b'.$$

Također:

$$(\sphericalangle ab \cong \sphericalangle a'b' \wedge \sphericalangle ac \cong \sphericalangle a'c') \Rightarrow \sphericalangle cb \cong \sphericalangle c'b'.$$

Dokaz. Pretpostavimo da $\sphericalangle ab \cong \sphericalangle a'b'$ nije zadovoljeno.
Prema aksiomu III_4, u poluravnini s rubom $a'a'^*$ koja sadrži b' postoji polupravac b_1 s početnom točkom O' takav da

$$\sphericalangle ab \cong \sphericalangle a'b_1.$$

Prema Lemi 2.1.12, u unutarnjem području $\sphericalangle a'b_1$ postoji polupravac c_1 s početnom točkom O' takav da je

$$\sphericalangle ac \cong \sphericalangle a'c_1 \quad \text{i} \quad \sphericalangle cb \cong \sphericalangle c_1b_1.$$

Međutim, tada iz

$$\sphericalangle ac \cong \sphericalangle a'c' \quad \text{i} \quad \sphericalangle ac \cong \sphericalangle a'c_1$$

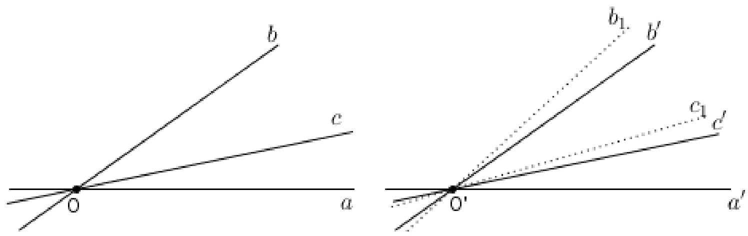
i jedinstvenosti polupravca c' temeljem aksioma III_4 slijedi:

$$c' = c_1.$$

Analogno slijedi:

$$b' = b_1.$$

Dakle, $\sphericalangle ab \cong \sphericalangle a'b'$.
Analogno bismo dokazali i drugi dio leme.



Slika 2.8: Dokaz Leme 2.1.13

□

Iskazana lema za sukladnost kutova tvrdi ono što aksiom III_3 tvrdi za sukladnost dužina.

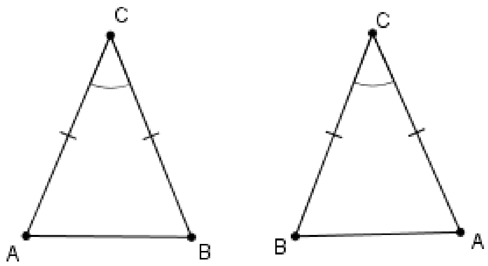
Lema 2.1.14. *Zadan je* $\triangle ABC$. *Ako*

$$\overline{AC} \cong \overline{BC},$$

onda je i

$$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle CBA.$$

Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ trokut takav da je $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. Dokažimo da vrijedi $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle CBA$. Promotrimo trokute $\triangle ABC$ i $\triangle BAC$.



Slika 2.9: Dokaz Leme 2.1.14

Za njih vrijedi:

$$\overline{AC} \cong \overline{BC}, \quad \overline{BC} \cong \overline{AC} \quad \text{i} \quad \sphericalangle ACB \cong \sphericalangle BCA.$$

Sada prema aksiomu III_5 slijedi:

$$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle CBA.$$

□

Lema 2.1.15. *Neka su točke C_1 i C_2 s različitih strana pravca AB. Tada*

$$(\overline{AC_1} \cong \overline{AC_2} \wedge \overline{BC_1} \cong \overline{BC_2}) \Rightarrow \sphericalangle AC_1B \cong \sphericalangle AC_2B.$$

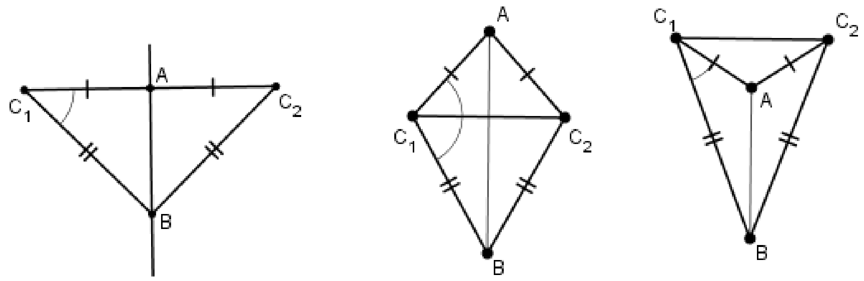
Dokaz. Ako se pravci C_1C_2 i C_1A podudaraju, tada, zbog $\overline{BC_1} \cong \overline{BC_2}$, na trokut $\triangle C_1BC_2$ primijenimo Lemu 2.1.14 pa slijedi

$$\sphericalangle AC_1B \cong \sphericalangle AC_2B.$$

Za pravce $C_1C_2 = C_1B$ tvrdnja slijedi analogno.

U slučaju $C_1C_2 \neq C_1A$ i $C_1C_2 \neq C_1B$ na svaki od trokuta $\triangle AC_1C_2$ i $\triangle BC_1C_2$, zbog $\overline{AC_1} \cong \overline{AC_2}$ i $\overline{BC_1} \cong \overline{BC_2}$, primijenimo Lemu 2.1.14 pa slijedi:

$$\sphericalangle AC_1C_2 \cong \sphericalangle AC_2C_1 \quad \text{i} \quad \sphericalangle BC_1C_2 \cong \sphericalangle BC_2C_1.$$



Slika 2.10: Dokaz Leme 2.1.15

Ako je polupravac C_1C_2 sadržan u unutrašnjosti $\sphericalangle AC_1B$, primjenjujemo prvi dio Leme 2.1.13. Tada imamo:

$$(\sphericalangle AC_1C_2 \cong \sphericalangle AC_2C_1 \wedge \sphericalangle BC_1C_2 \cong \sphericalangle BC_2C_1) \Rightarrow \sphericalangle AC_1B \cong \sphericalangle AC_2B.$$

Ako je polupravac C_1A sadržan u unutrašnjosti $\sphericalangle C_2C_1B$, primjenjujemo drugi dio Leme 2.1.13, tj.:

$$(\sphericalangle BC_1C_2 \cong \sphericalangle BC_2C_1 \wedge \sphericalangle AC_1C_2 \cong \sphericalangle AC_2C_1) \Rightarrow \sphericalangle AC_1B \cong \sphericalangle AC_2B.$$

U slučaju kada je polupravac C_1B sadržan u unutrašnjosti $\sphericalangle C_2C_1A$ tvrdnja slijedi analogno. Dakle, u svakom slučaju slijedi $\sphericalangle AC_1B \cong \sphericalangle AC_2B$. □

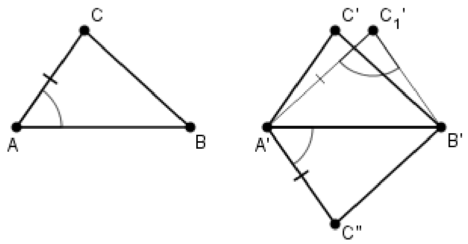
Lema 2.1.16. *Neka su zadani $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$. Ako je*

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'},$$

tada je i

$$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C'A'B', \quad \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C' \quad i \quad \sphericalangle BCA \cong \sphericalangle B'C'A'.$$

Dokaz. Neka je točka C'' sadržana u onoj poluravnini s rubom $A'B'$ koja ne sadrži točku C' te neka je $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C''A'B'$ i $\overline{AC} \cong \overline{A'C''}$.



Slika 2.11: Dokaz Leme 2.1.16

Tada prema Lemi 2.1.11 slijedi $\overline{BC} \cong \overline{B'C''}$ pa kako je sukladnost dužina tranzitivna relacija, imamo

$$\overline{A'C''} \cong \overline{A'C'} \quad \text{te} \quad \overline{B'C''} \cong \overline{B'C'}.$$

Iz ovih uvjeta i Leme 2.1.15 slijedi

$$\sphericalangle A'C''B' \cong \sphericalangle A'C'B'.$$

Kako je

$$\overline{A'C'} \cong \overline{A'C''}, \quad \overline{B'C'} \cong \overline{B'C''} \quad \text{te} \quad \sphericalangle A'C'B' \cong \sphericalangle A'C''B',$$

prema aksiomu III_5 slijedi:

$$\sphericalangle C''A'B' \cong \sphericalangle C'A'B'. \tag{2.6}$$

Neka je točka C_1' sadržana u onoj poluravnini s rubom $A'B'$ koja sadrži i točku C' te neka je

$$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C_1'A'B' \quad \text{i} \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C_1'}.$$

Iz

$$\overline{AC} \cong \overline{A'C''} \quad \text{i} \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C_1'}$$

tada je

$$\overline{A'C_1'} \cong \overline{A'C''}$$

i, prema Lemi 2.1.11,

$$\overline{B'C_1'} \cong \overline{B'C''},$$

pa, ponavljajući prethodni postupak, dobivamo:

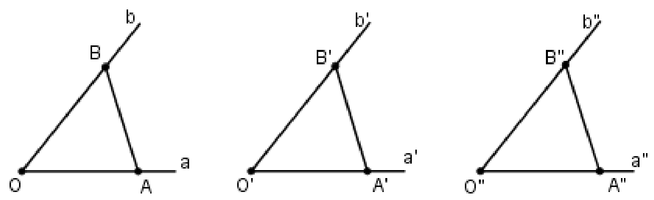
$$\sphericalangle C''A'B' \cong \sphericalangle C_1'A'B'. \tag{2.7}$$

Kako su točke C' i C_1' sadržane u istoj poluravnini, polupravci $A'C'$ i $A'C_1'$ s početkom u točki A sadržani su u istoj poluravnini pa su relacije (2.6) i (2.7) u kontradikciji s aksiomom III_4.
Dakle, $A'C' = A'C_1'$ pa, prema Teoremu 2.1.8, slijedi $C' = C_1'$.
Točka C_1' bila je izabrana tako da je $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C_1'A'B'$. Dakle, $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C'A'B'$.
Ostale dvije relacije u lemi direktne su posljedice aksioma III_5. □

Lema 2.1.17. *Sukladnost kutova je tranzitivna relacija.*

Dokaz. Neka je $\sphericalangle ab \cong \sphericalangle a'b'$ i $\sphericalangle a'b' \cong \sphericalangle a''b''$.
Označimo s O, O' i O'' redom tjemena kutova $\sphericalangle ab$, $\sphericalangle a'b'$ i $\sphericalangle a''b''$ te neka je

$$A \in a, \quad A' \in a', \quad A'' \in a'' \quad \text{i} \quad \overline{OA} \cong \overline{O'A'} \cong \overline{O''A''},$$
$$B \in b, \quad B' \in b', \quad B'' \in b'' \quad \text{i} \quad \overline{OB} \cong \overline{O'B'} \cong \overline{O''B''}.$$



Slika 2.12: Dokaz Leme 2.1.17

Primjenom Leme 2.1.11 na $\triangle OAB$ i $\triangle O'A'B'$ dobivamo

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'},$$

a primjenom na $\triangle O'A'B'$ i $\triangle O''A''B''$ dobivamo

$$\overline{A'B'} \cong \overline{A''B''}.$$

Kako je sukladnost dužina tranzitivna relacija, za $\triangle OAB$ i $\triangle O''A''B''$ vrijedi

$$\overline{AB} \cong \overline{A''B''}, \quad \overline{OA} \cong \overline{O''A''}, \quad \overline{OB} \cong \overline{O''B''}$$

pa iz Leme 2.1.16 slijedi

$$\sphericalangle ab \cong \sphericalangle a''b''.$$

□

Na potpuno analogan način dokazuje se i:

Lema 2.1.18. $(\sphericalangle ab \cong \sphericalangle a'b' \wedge \sphericalangle ab \cong \sphericalangle a''b'') \Rightarrow \sphericalangle a'b' \cong \sphericalangle a''b''$.

Iskazana lema za sukladnost kutova tvrdi ono što aksiom III_2 za sukladnost dužina.

Lema 2.1.19. *Sukladnost kutova je refleksivna relacija.*

Dokaz. Neka je α poluravnina s rubnim pravcem p i neka je polupravac $a \subset p$ s početnom točkom O te neka je polupravac $b \subset \alpha$ s početnom točkom O. Promotrimo $\sphericalangle ab$.
Neka je α' poluravnina s rubnim pravcem p' te neka je polupravac $a' \subset p'$ s početnom točkom O'. Na temelju aksioma III_4 postoji jedinstven polupravac $b' \subset \alpha'$ s početnom točkom O' takav da je

$$\sphericalangle ab \cong \sphericalangle a'b'. \tag{2.8}$$

Promotrimo $\sphericalangle a'b'$ i polupravac a s početnom točkom O. Tada, također prema aksiomu III_4, postoji jedinstven polupravac $b_1 \subset \alpha$ s početnom točkom O takav da je

$$\sphericalangle a'b' \cong \sphericalangle ab_1. \tag{2.9}$$

Iz (2.8) i (2.9) i tranzitivnosti relacije slijedi

$$\sphericalangle ab \cong \sphericalangle ab_1.$$

Međutim, kako aksiom III_4 zahtijeva jedinstvenost pravca b, mora vrijediti $b = b_1$.
Dakle, vrijedi

$$\sphericalangle ab \cong \sphericalangle ab,$$

tj. sukladnost kutova je refleksivna relacija. □

Lema 2.1.20. *Sukladnost kutova je simetrična relacija.*

Dokaz. Primjenjujući aksiom III_4, refleksivnost te Lemu 2.1.18, dobivamo:

$$(\sphericalangle ab \cong \sphericalangle a'b' \wedge \sphericalangle ab \cong \sphericalangle ab) \Rightarrow \sphericalangle a'b' \cong \sphericalangle ab.$$

Dakle,

$$\sphericalangle ab \cong \sphericalangle a'b' \Rightarrow \sphericalangle a'b' \cong \sphericalangle ab.$$

□

Prema Lemi 2.1.19 sukladnost kutova je refleksivna relacija, prema Lemi 2.1.20 simetrična te prema Lemi 2.1.17 tranzitivna relacija. Iz toga slijedi:

Teorem 2.1.21. *Sukladnost kutova je relacija ekvivalencije.*

2.2 Mjere dužina i kutova

Definicija 2.2.1. *Neka je svakoj dužini pridružen pozitivan realan broj tako da:*

1.) sukladnim dužinama pridružen je isti broj;

2.) ako je $(A - B - C)$, dužini $\overline{AC}$ pridružen je broj koji je zbroj brojeva pridruženih dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$;

3.) postoji dužina kojoj je pridružen broj 1.

Broj pridružen $\overline{AB}$ je duljina dužine $\overline{AB}$. Pišemo $|AB|$.

Definicija 2.2.2. *Kažemo da je $\overline{AB}$ manja od $\overline{CD}$ ako postoji točka P takva da je $(C-P-D)$ i $\overline{CP} \cong \overline{AB}$. To zapisujemo ovako: $\overline{AB} < \overline{CD}$. Također, kažemo da je $\overline{CD}$ veće od $\overline{AB}$ ako je $\overline{AB} < \overline{CD}$. To zapisujemo ovako: $\overline{CD} > \overline{AB}$.*

Teorem 2.2.3. *U skupu svih dužina relacija "...manje od..." je relacija strogog uređaja.*

Teorem 2.2.4. *Za dvije dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ uvijek je zadovoljena jedna i samo jedna od ove tri relacije:*

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}, \quad \overline{AB} < \overline{CD}, \quad \overline{AB} > \overline{CD}.$$

Dokaz. Neka je CD polupravac s početkom u točki C i točka P takva da je:

$$P \in CD \wedge \overline{CP} \cong \overline{AB}.$$

Prema tome je

$$\text{ili} \quad P = D \quad \text{ili} \quad (C - P - D) \quad \text{ili} \quad (C - D - P).$$

Iz $P = D$ slijedi $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
Iz $(C - P - D)$ slijedi $\overline{AB} < \overline{CD}$.
Iz $(C - D - P)$ slijedi $\overline{AB} < \overline{CD}$. □

Definicija 2.2.5. *Neka su $\overline{AB}$, $\overline{A_1B_1}$ i $\overline{A_2B_2}$ zadane dužine. Kažemo da je duljina dužine $\overline{AB}$ zbroj duljina dužina $\overline{A_1B_1}$ i $\overline{A_2B_2}$ ako postoji točka P takva da je*

$$(A - P - B), \quad \overline{AP} \cong \overline{A_1B_1}, \quad \overline{PB} \cong \overline{A_2B_2}.$$

To zapisujemo ovako: $|AB| = |A_1B_1| + |A_2B_2|$.

Definicija 2.2.6. *Neka je svakom kutu pridružen pozitivan realan broj tako da:*

1.) sukladnim kutovima pridružen je isti broj;

2.) *ako je* $(a-b-c)$*, kutu* $\sphericalangle ac$ *pridružen je broj koji je zbroj brojeva pridruženih kutovima* $\sphericalangle ab$ *i* $\sphericalangle bc$*;*

3.) *postoji kut kojem je pridružen broj 1.*

Broj pridružen $\sphericalangle ab$ *je mjera kuta* $\sphericalangle ab$*. Pišemo* $|\sphericalangle ab|$*. Ako je* O *vrh kuta* $\sphericalangle ab$ *te* $A \in a$ *i* $B \in b$*, možemo pisati* $|\sphericalangle AOB|$*.*

Definicija 2.2.7. *Kažemo da je* $\sphericalangle ab$ *manji od* $\sphericalangle cd$ *ako postoji polupravac* p *čija je početna točka vrh kuta* $\sphericalangle cd$*, koji je sadržan u unutarnjem području tog kuta i takav da je* $\sphericalangle cp \cong \sphericalangle ab$*. To zapisujemo ovako:* $\sphericalangle ab < \sphericalangle cd$*. Također, kažemo da je* $\sphericalangle cd$ *veći od* $\sphericalangle ab$ *ako je* $\sphericalangle ab < \sphericalangle cd$*. To zapisujemo ovako:* $\sphericalangle cd > \sphericalangle ab$*.*

Teorem 2.2.8. *U skupu svih kutova relacija "...manje od..." je relacija strogog uređaja.*

Analogno kao i Teorem 2.2.4, dokazali bismo:

Teorem 2.2.9. *Za dva kuta* $\sphericalangle ab$ *i* $\sphericalangle cd$ *uvijek je zadovoljena jedna i samo jedna od ove tri relacije:*

$$\sphericalangle ab \cong \sphericalangle cd, \quad \sphericalangle ab < \sphericalangle cd, \quad \sphericalangle ab > \sphericalangle cd.$$

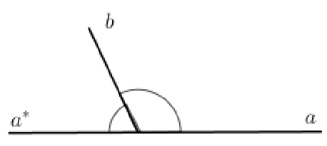
Definicija 2.2.10. *Neka su* $\sphericalangle ab$*,* $\sphericalangle a_1b_1$*,* $\sphericalangle a_2b_2$ *zadani kutovi. Kažemo da je mjera kuta* $\sphericalangle ab$ *zbroj mjera kutova* $\sphericalangle a_1b_1$ *i* $\sphericalangle a_2b_2$ *ako postoji polupravac* p *s početnom točkom u vrhu kuta* $\sphericalangle ab$ *takav da je*

$$(a - p - b), \quad \sphericalangle ap \cong \sphericalangle a_1b_1, \quad \sphericalangle pb \cong \sphericalangle a_2b_2.$$

To zapisujemo ovako: $|\sphericalangle ab| = |\sphericalangle a_1b_1| + |\sphericalangle a_2b_2|$*.*

Iskažimo još nekoliko teorema koji će nam biti potrebni za daljnja razmatranja.

Definicija 2.2.11. *Neka je zadan* $\sphericalangle ab$ *te neka je* a^* *dopuna polupravca* a*. Tada je* $\sphericalangle a^*b$ *sukut kuta* $\sphericalangle ab$*.*



Slika 2.13: Sukut kuta $\sphericalangle ab$

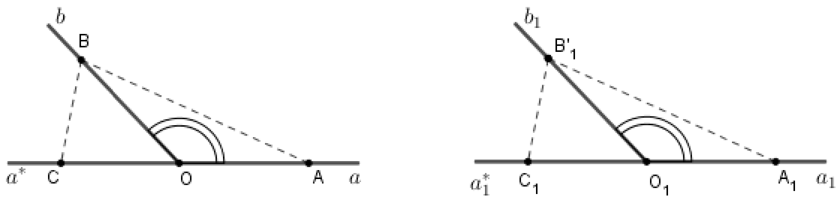
Teorem 2.2.12. *Sukuti sukladnih kutova su sukladni.*

Dokaz. Neka je $\sphericalangle ab \cong \sphericalangle a_1b_1$ te neka su O i O_1 vrhovi navedenih kutova.
Označimo sa a^*, odnosno a_1^* dopunu polupravca a, odnosno a_1 do pravca. Tada su kutovi $\sphericalangle ab$ i $\sphericalangle ba^*$ te kutovi $\sphericalangle a_1b_1$ i $\sphericalangle b_1a_1^*$ sukuti.
Neka je

$$A \in a, \quad B \in b, \quad C \in a^*, \quad A_1 \in a_1, \quad B_1 \in b_1, \quad C_1 \in a_1^*,$$

te

$$\overline{OA} \cong \overline{O_1A_1}, \quad \overline{OB} \cong \overline{O_1B_1}, \quad \overline{OC} \cong \overline{O_1C_1}.$$



Slika 2.14: Dokaz Teorema 2.2.12

Primijenimo li na trokute $\triangle OAB$ i $\triangle O_1A_1B_1$ aksiom III_5 i Lemu 2.1.11, dobivamo:

$$\sphericalangle OAB \cong \sphericalangle O_1A_1B_1 \quad \text{i} \quad \overline{AB} \cong \overline{A_1B_1}.$$

Prema aksiomu III_3 iz $\overline{OC} \cong \overline{O_1C_1}$ i $\overline{OA} \cong \overline{O_1A_1}$ slijedi

$$\overline{AC} \cong \overline{A_1C_1},$$

pa primjenjujući na trokute $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ aksiom III_5 i Lemu 2.1.11, dobivamo:

$$\sphericalangle OCB \cong \sphericalangle O_1C_1B_1 \quad \text{i} \quad \overline{CB} \cong \overline{C_1B_1}.$$

Na kraju, primijenimo aksiom III_5 na trokute $\triangle COB$ i $\triangle C_1O_1B_1$ pa dobivamo

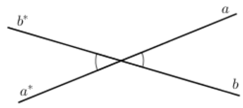
$$\sphericalangle BOC \cong \sphericalangle B_1O_1C_1,$$

tj.

$$\sphericalangle ba^* \cong \sphericalangle b_1a_1^*$$

što je i trebalo dokazati. □

Definicija 2.2.13. *Neka je zadan $\sphericalangle ab$ te neka su a^* i b^* dopune polupravcima a i b. Tada su $\sphericalangle a^*b^*$ i $\sphericalangle ab$ vršni kutovi.*



Slika 2.15: Vršni kutovi

Teorem 2.2.14. *Vršni kutovi su sukladni.*

Dokaz. Neka su $\sphericalangle ab$ i $\sphericalangle a^*b^*$ vršni kutovi. Svaki od kutova $\sphericalangle ab$ i $\sphericalangle a^*b^*$ sukut je kutu $\sphericalangle ab^*$. Kako vrijedi $\sphericalangle ab^* \cong \sphericalangle ab^*$, prema Teoremu 2.2.12 sukuti sukladnih kutova su sukladni pa vrijedi

$$\sphericalangle ab \cong \sphericalangle a^*b^*.$$

□

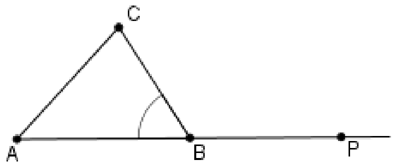
Definicija 2.2.15. *Sukut kuta trokuta naziva se vanjski kut trokuta.*

Teorem 2.2.16. *Vanjski kut uz jedan vrh trokuta jednak je zbroju unutarnjih kutova uz preostala dva vrha.*

Dokaz ovog teorema provest ćemo malo kasnije.

Teorem 2.2.17. *Vanjski kut uz jedan vrh trokuta veći je od unutarnjih kutova uz preostala dva vrha.*

Dokaz. Promotrimo $\triangle ABC$ i njegov $\sphericalangle ABC$. Ako $P \in AB$ tako da $(A - B - P)$, $\sphericalangle CBP$ je vanjski kut $\triangle ABC$. Njegov sukut je $\sphericalangle ABC$. (Slika 2.16) Teorem tvrdi da je $\sphericalangle CBP$ veći od $\sphericalangle BCA$ i od $\sphericalangle CAB$.



Slika 2.16: Dokaz Teorema 2.2.17 (1)

Dokažimo

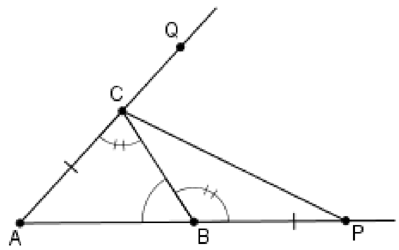
$$\sphericalangle BCA < \sphericalangle CBP.$$

Kako je, prema Teoremu 2.2.9,

$$\text{ili} \quad \sphericalangle BCA \cong \sphericalangle CBP \quad \text{ili} \quad \sphericalangle BCA > \sphericalangle CBP \quad \text{ili} \quad \sphericalangle BCA < \sphericalangle CBP,$$

dokaz se provodi tako da se dokaže nemogućnost prvih dviju tvrdnji.

Pretpostavimo $\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle CBP$.
Neka je točka P takva da $\overline{BP} \cong \overline{AC}$. (Slika 2.17)



Slika 2.17: Dokaz Teorema 2.2.17 (2)

Uočimo trokute $\triangle ABC$ i $\triangle BCP$. Kako je

$$\overline{AC} \cong \overline{BP}, \quad \overline{BC} \cong \overline{BC}, \quad \sphericalangle BCA \cong \sphericalangle CBP,$$

primjenom aksioma III_5 dobivamo:

$$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle BCP. \tag{2.10}$$

Neka je točka $Q \in AC$ takva da $(A - C - Q)$. Kako je $\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle CBP$, na temelju Teorema 2.2.12 slijedi:

$$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle BCQ. \tag{2.11}$$

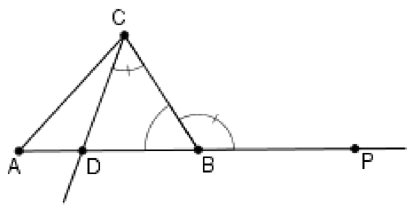
Kako su CP i CQ dva različita polupravca s početkom u točki C, a zbog $(A - B - P)$ i $(A-C-Q)$ sadržani su u istoj poluravnini s rubom BC, relacije (2.10) i (2.11) u suprotnosti su s aksiomom III_4. To znači da smo došli do kontradikcije pa slijedi da $\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle CBP$ ne vrijedi.

Pretpostavimo sada $\sphericalangle BCA > \sphericalangle CBP$.
Prema definiciji postoji polupravac CD (Slika 2.18) s početkom u točki C koji je sadržan u unutarnjem području kuta $\sphericalangle BCA$ i takav da je

$$\sphericalangle BCD \cong \sphericalangle CBP.$$

Kako je CD sadržan u unutarnjem području kuta $\sphericalangle BCA$, na temelju Teorema 2.1.10, točku D možemo izabrati tako da

$$\overline{AB} \cap CD = \{D\}.$$



Slika 2.18: Dokaz Teorema 2.2.17 (3)

Tada za $\triangle DBC$ vrijedi $\sphericalangle BCD \cong \sphericalangle CBP$ pri čemu je $\sphericalangle CBP$ vanjski kut $\triangle DBC$. Iz navedenog slijedi da je vanjski kut uz jedan vrh trokuta jednak jednom unutarnjem kutu uz drugi vrh trokuta. Navedeni rezultat opovrgnuli smo u prvom dijelu dokaza. Dakle, ni $\sphericalangle BCA > \sphericalangle CBP$ ne vrijedi.

Iz toga zaključujemo da mora vrijediti

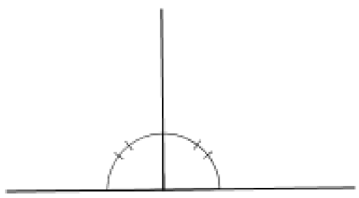
$$\sphericalangle BCA < \sphericalangle CBP.$$

Analogno bismo dokazali i

$$\sphericalangle CAB < \sphericalangle CBP.$$

□

Definicija 2.2.18. *Za kut sukladan svom sukutu kažemo da je pravi kut.*



Slika 2.19: Pravi kut

Iako se u ovom radu time nećemo koristiti, napomenimo da pravi kut ima mjeru 90°. Kako smo prije definirali sukute, napomenimo da sukuti zajedno čine ispružen kut čija je mjera 180°, dok vršni kutovi $\sphericalangle ab$ i $\sphericalangle a^*b^*$ te $\sphericalangle ab^*$ i $\sphericalangle a^*b$ zajedno čine puni kut čija je mjera 360°.

Dokažimo još i sljedeće tvrdnje:

Lema 2.2.19. *Neka su zadani $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$. Ako je*

$$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C'A'B', \quad \sphericalangle ACB \cong \sphericalangle A'C'B' \quad i \quad \overline{AB} \cong \overline{A'B'},$$

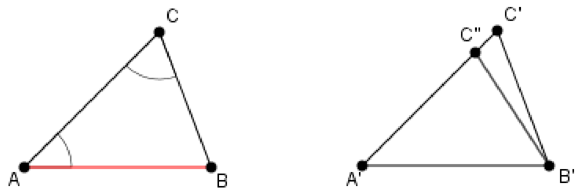
tada je

$$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}.$$

Dokaz. Prema Teoremu 2.2.4 je

$$\text{ili} \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \quad \text{ili} \quad \overline{AC} < \overline{A'C'} \quad \text{ili} \quad \overline{AC} > \overline{A'C'}.$$

Neka je $\overline{AC} < \overline{A'C'}$.



Slika 2.20: Dokaz Leme 2.2.19

Tada postoji točka C'' takva da je

$$(A' - C'' - C') \quad \text{i} \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C''}.$$

Primjenom aksioma III_5 na $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C''$ imamo

$$\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle A'C''B'.$$

Iz toga slijedi

$$\sphericalangle A'C''B' \cong \sphericalangle A'C'B'.$$

Kut $\sphericalangle A'C''B'$ je vanjski kut $\triangle C''B'C'$ pa bi slijedilo da je vanjski kut uz jedan vrh trokuta sukladan unutarnjem kutu uz drugi vrh trokuta, a to je u kontradikciji s Teoremom 2.2.17.
Na isti način dokazujemo i nemogućnost $\overline{AC} > \overline{A'C'}$.
Dakle, mora vrijediti $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$. $\square$

Teorem 2.2.20. *Za svaku dužinu $\overline{AB}$ postoji jedna i samo jedna točka S takva da je*

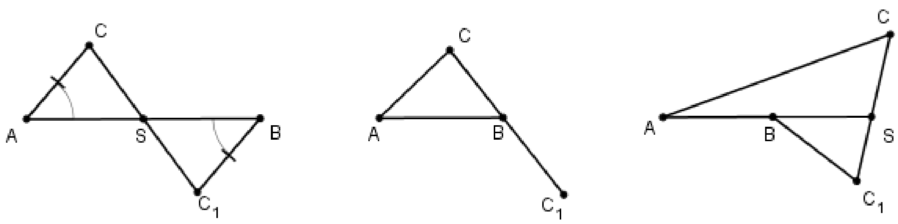
$$(A - S - B) \quad i \quad \overline{AS} \cong \overline{SB}.$$

Dokaz. Neka je u ravnini α dana dužina $\overline{AB}$ te točke C i C_1 s različitih strana pravca AB takve da

$$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C_1BA, \quad \overline{CA} \cong \overline{C_1B}.$$

Kako su C i C_1 s različitih strana pravca AB, slijedi da postoji točka S takva da

$$S \in AB \quad \text{i} \quad (C - S - C_1).$$



Slika 2.21: Dokaz Teorema 2.2.20

Dokazat ćemo da je $(A - S - B)$. Prije toga pokažimo da $S \neq A$ i $S \neq B$.
Pretpostavimo da je $S = B$. Tada je $(C - B - C_1)$ i $\sphericalangle ABC_1$ je vanjski kut $\triangle ABC$.
Iz $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C_1BA$ slijedi da je vanjski kut $\triangle ABC$ uz jedan vrh trokuta sukladan s unutarnjim kutom uz drugi vrh trokuta, a to je u kontradikciji s Teoremom 2.2.17.
Analogno pokazujemo $S \neq A$.

Dakle, A, B i S su tri različite točke. Iz aksioma II_3 slijedi da je

$$\text{ili} \quad (A - S - B) \quad \text{ili} \quad (A - B - S) \quad \text{ili} \quad (B - A - S).$$

Pretpostavimo da je $(A - B - S)$. Iz Teorema 2.2.17 slijedi

$$\sphericalangle C_1BA > \sphericalangle C_1SA > \sphericalangle CAS,$$

a kako je u skupu kutova relacija " $>$ " tranzitivna, vrijedi

$$\sphericalangle C_1BA > \sphericalangle CAB.$$

Međutim, prema postavljenom uvjetu na početku je

$$\sphericalangle C_1BA \cong \sphericalangle CAB$$

pa prema Teoremu 2.2.9 slijedi kontradikcija.

Analogno bismo došli do kontradikcije $(B - A - S)$.
Dakle, mora vrijediti $(A - S - B)$.

Pokažimo sada
$$\overline{AS} \cong \overline{BS}.$$
Uočimo trokute $\triangle ASC$ i $\triangle BSC_1$. Iz $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C_1BA$, $\sphericalangle ASC \cong \sphericalangle BSC_1$ (vršni kutovi) te $\overline{CA} \cong \overline{C_1B}$ te primjenom Leme 2.2.19 slijedi
$$\overline{AS} \cong \overline{SB}.$$

Sada preostaje dokazati jedinstvenost točke S. Pretpostavimo da postoji točka $S_1 \neq S$ takva da je
$$(A - S_1 - B) \quad \text{i} \quad \overline{AS_1} \cong \overline{S_1B}.$$
Kako je $(A - S - B)$ i $(A - S_1 - B)$, vrijedi da je ili $(A - S_1 - S)$ ili $(A - S - S_1)$.
Neka je $(A - S_1 - S)$. Iz $(A - S_1 - S)$ i $(A - S - B)$ slijedi $(S_1 - S - B)$ pa je
$$\overline{AS} > \overline{AS_1} \cong \overline{S_1B} > \overline{SB},$$
tj.
$$\overline{AS} > \overline{SB},$$
a to je u kontradikciji s $\overline{AS} \cong \overline{SB}$. Dakle, $\neg(A - S_1 - S)$.
Analogno dokazujemo $\neg(A - S - S_1)$.
Dakle, mora vrijediti $S = S_1$, tj. dokazali smo jedinstvenost točke S. □

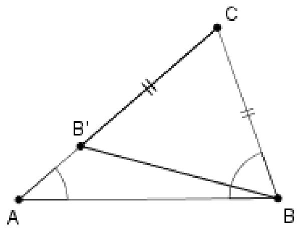
Definicija 2.2.21. *Točku S iz Teorema 2.2.20 zovemo polovište dužine.*

Također, iskažimo i dokažimo sljedeće teoreme:

Teorem 2.2.22. *Za svaki trokut $\triangle ABC$, iz $\overline{AC} > \overline{BC}$ slijedi $\sphericalangle ABC > \sphericalangle CAB$ i obratno.*

Dokaz. Zbog $\overline{AC} > \overline{BC}$, postoji točka B' takva da $(A - B' - C)$ i $\overline{B'C} \cong \overline{BC}$. (Slika 2.22)

Tada je, prema Lemi 2.1.14,
$$\sphericalangle CB'B \cong \sphericalangle B'BC. \tag{2.12}$$
Kako je $(A-B'-C)$, polupravac BB' s početkom u točki B sadržan je u unutarnjem području $\sphericalangle ABC$. Zbog toga je
$$\sphericalangle ABC > \sphericalangle B'BC. \tag{2.13}$$



Slika 2.22: Dokaz Teorema 2.2.22 (1)

Iz (2.12) i (2.13) tada slijedi:

$$\sphericalangle ABC > \sphericalangle CB'B. \tag{2.14}$$

Uočimo $\triangle ABB'$. Kut $\sphericalangle CB'B$ vanjski je kut tog trokuta. Prema Teoremu 2.2.17, tada slijedi:

$$\sphericalangle CB'B > \sphericalangle CAB. \tag{2.15}$$

Iz (2.14) i (2.15) tada slijedi:

$$\sphericalangle ABC > \sphericalangle CAB,$$

čime je tvrdnja dokazana.

Dokažimo sada obrat, tj. iz $\sphericalangle ABC > \sphericalangle CAB$ slijedi $\overline{AC} > \overline{BC}$.
Prema Teoremu 2.2.4 je

$$\text{ili} \quad \overline{AC} \cong \overline{BC} \quad \text{ili} \quad \overline{AC} < \overline{BC} \quad \text{ili} \quad \overline{AC} > \overline{BC}.$$

Dokazat ćemo da prve dvije tvrdnje nisu moguće.

Pretpostavimo $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. Međutim, tada je, prema Lemi 2.1.14, $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle CAB$ što je u suprotnosti s uvjetom teorema. Dakle, $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ ne vrijedi.

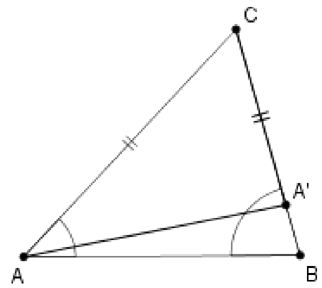
Pretpostavimo $\overline{AC} < \overline{BC}$.
Tada postoji točka A' takva da $(B - A' - C)$ i $\overline{AC} \cong \overline{CA'}$. (Slika 2.23)

Iz $\overline{AC} \cong \overline{CA'}$, prema Lemi 2.1.14, slijedi:

$$\sphericalangle CAA' \cong \sphericalangle AA'C. \tag{2.16}$$

Kako je $(B - A' - C)$, to je polupravac AA' s početkom u točki A sadržan u unutarnjem području kuta $\sphericalangle CAB$. Zbog toga je

$$\sphericalangle CAB > \sphericalangle CAA'. \tag{2.17}$$



Slika 2.23: Dokaz Teorema 2.2.22 (2)

Iz (2.16) i (2.17) slijedi

$$\sphericalangle CAB > \sphericalangle AA'C. \tag{2.18}$$

Uočimo trokut $\triangle ABA'$. Kut $\sphericalangle AA'C$ vanjski je kut tog trokuta. Iz Teorema 2.2.17 tada slijedi:

$$\sphericalangle AA'C > \sphericalangle ABC. \tag{2.19}$$

Iz (2.18) i (2.19) tada slijedi:

$$\sphericalangle CAB > \sphericalangle ABC,$$

što je u kontradikciji s uvjetom teorema.

Dakle, mora vrijediti $\overline{AC} > \overline{BC}$.

□

Teorem 2.2.23. *Za svaki trokut, duljina svake stranice je manja od zbroja duljina drugih dviju stranica.*

Dokaz. Neka je dan trokut $\triangle ABC$ i neka je $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$. Na polupravcu AC s početnom točkom A označimo točku D tako da $(A - C - D)$ i $|CD| = a$.

Promotrimo trokut $\triangle CBD$. Kako je $\overline{BC} \cong \overline{CD}$, prema Lemi 2.1.14 slijedi

$$\sphericalangle CBD \cong \sphericalangle BDC. \tag{2.20}$$

Tada vrijedi

$$\sphericalangle ABD > \sphericalangle CBD,$$

dok iz (2.20) slijedi

$$\sphericalangle ABD > \sphericalangle BDC,$$

tj.

$$\sphericalangle ABD > \sphericalangle BDA.$$

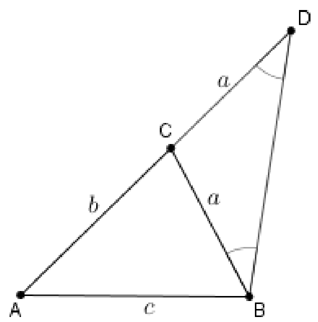
Kako je $\sphericalangle ABD > \sphericalangle BDA$, prema Teoremu 2.2.22, slijedi

$$\overline{AD} > \overline{AB},$$

tj.

$$a + b > c.$$

□



Slika 2.24: Dokaz Teorema 2.2.23

Do kraja ovog dijela u radu se se pojavile tri leme koje nas podsjećaju na poučke o sukladnosti trokuta. Lema 2.1.11 zapravo je SKS poučak o sukladnosti trokuta. Kao što je i u Teoremu 1.1.2, uvjet za sukladnost je sukladnost dviju odgovarajućih stranica trokuta i kuta između njih. Lema 2.1.16 zapravo je SSS poučak o sukladnosti trokuta. Uvjet za sukladnost trokuta je sukladnost svih odgovarajućih stranica trokuta, kao što je i navedeno u Teoremu 1.1.4. Na kraju, KSK poučak o sukladnosti trokuta, tj. Teorem 1.1.3 krije se u Lemi 2.2.19 gdje je uvjet za sukladnost dva trokuta sukladnost dva odgovarajuća kuta i jedne odgovarajuće stranice.

2.3 Okomitost i paralelnost

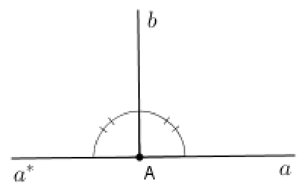
Definicija 2.3.1. *Pravci a i b na kojima leže krakovi pravog kuta nazivaju se okomitim pravcima. Pišemo $a \perp b$.*

Teorem 2.3.2. *Za svaku ravninu α i svaki pravac $p \in \alpha$ i svaku točku $A \in p$ postoji jedan i samo jedan pravac n takav da je $A \in n$ i $n \perp p$.*

Dokaz. Označimo sa a i a^* polupravce koje na pravcu p određuje točka A. Neka je α_1 jedna poluravnina s rubom p. Neka je b proizvoljni polupravac s početnom točkom A sadržan u

α_1.

Ako je $\sphericalangle ab \cong \sphericalangle ba^*$, prema definiciji pravog kuta, b je traženi pravac, tj. $b \perp p$. (Slika 2.25)

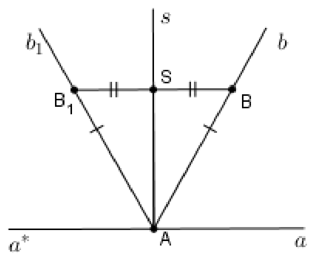


Slika 2.25: Dokaz Teorema 2.3.2 (1)

Ako $\neg(\sphericalangle ab \cong \sphericalangle ba^*)$, tada u ravnini α_1 postoji, prema aksiomu III_4, polupravac b_1 s početnom točkom A takav da je

$$\sphericalangle a^* b_1 \cong \sphericalangle ab.$$

Neka je $B \in b$ proizvoljna točka te neka je točka $B_1 \in b_1$ takva da $\overline{AB} \cong \overline{AB_1}$. Neka je točka S takva da $(B_1 - S - B)$ i $\overline{B_1 S} \cong \overline{SB}$. (Slika 2.26)



Slika 2.26: Dokaz Teorema 2.3.2 (2)

Uočimo trokute $\triangle ABS$ i $\triangle AB_1S$. Iz

$$\overline{AB} \cong \overline{AB_1}, \quad \overline{BS} \cong \overline{SB_1}, \quad \overline{AS} \cong \overline{AS},$$

primjenom Leme 2.1.16 slijedi

$$\sphericalangle bs \cong \sphericalangle b_1 s,$$

gdje je s polupravac AS s početkom u točki A.
Iz

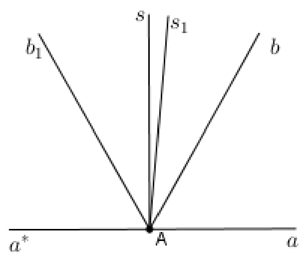
$$\sphericalangle a^* b_1 \cong \sphericalangle ab \quad \text{i} \quad \sphericalangle b_1 s \cong \sphericalangle bs,$$

a primjenom Leme 2.1.13, slijedi:

$$\sphericalangle as \cong \sphericalangle sa^*.$$

Tada je, prema definiciji pravog kuta, $s \perp p$, tj. pravac n koji sadrži polupravac s traženi je pravac.

Dokažimo sada jedinstvenost pravca n.
Neka je $n_1 \neq n$ takav da $A \in n_1$ i $n_1 \perp p$. (Slika 2.27)



Slika 2.27: Dokaz Teorema 2.3.2 (3)

Tada u ravnini α_1 postoji polupravac $s_1 \neq s$ s početnom točkom A takav da je

$$\sphericalangle as_1 \cong \sphericalangle a^* s_1.$$

Kako je $s_1 \neq s$ i kako s_1 i s imaju zajedničku početnu točku A, s_1 sadržan je ili u unutarnjem području kuta $\sphericalangle as$ ili u unutarnjem području kuta $\sphericalangle sa^*$.
Pretpostavimo $(a - s_1 - s)$. Tada je $(a^* - s - s_1)$. Iz toga slijedi:

$$\sphericalangle as > \sphericalangle as_1 \cong \sphericalangle a^* s_1 > \sphericalangle sa^*.$$

Iz toga dalje slijedi:

$$\sphericalangle as > \sphericalangle sa^*,$$

a to je u kontradikciji s definicijom pravog kuta $\sphericalangle as$.
Dakle, mora vrijediti $s_1 = s$, tj. $n_1 = n$. □

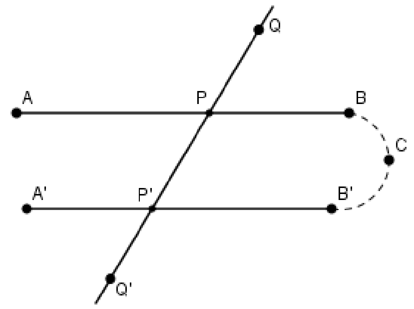
Definicija 2.3.3. *Pravac koji sadrži polovište dužine $\overline{AB}$ i okomit je na nju zovemo simetralom dužine $\overline{AB}$.*

Korolar 2.3.4. *Simetrala dužine jednoznačno je određena.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz Teorema 2.3.2, Teorema 2.2.20 te definicije simetrale dužine. □

Teorem 2.3.5. *Neka su u ravnini dane $P \in AB$, $P' \in A'B'$, $Q, Q' \in PP'$ takve da je $(Q - P - P')$ i $(P - P' - Q')$. Ako je $\sphericalangle QPB \cong \sphericalangle PP'B'$, onda je $AB \cap A'B' = \emptyset$.*

Dokaz. Pretpostavimo $AB \cap A'B' = \{C\}$. Tada je $\sphericalangle QPC$ vanjski kut $\triangle PCP'$, a sukladan je s $\sphericalangle PP'C$ tog trokuta. Prema Teoremu 2.2.17 to nije moguće. □



Slika 2.28: Dokaz Teorema 2.3.5

Definicija 2.3.6. *Neka su u ravnini dani pravci a i b. Kažemo da je pravac b paralelan s pravcem a, i to zapisujemo ovako: $b \parallel a$, ako je*

$$a \cap b = \emptyset \quad ili \quad a = b.$$

Iz definicije paralelnosti pravaca slijedi da je relacija "biti paralelan" refleksivna i simetrična.

Dokažimo da je i tranzitivna.

Neka je $a \parallel c$ i $b \parallel c$. Ako a i b nisu paralelni, onda je $a \cap b = \{P\}$ pa postoje dva pravca, a i b, koji sadrže P, a paralelni su sa c. To je u suprotnosti s aksiomom V_E. Dakle $a \parallel b$.
Time dolazimo do teorema:

Teorem 2.3.7. *U skupu svih pravaca u ravnini relacija "biti paralelan" je relacija ekvivalencije.*

Sada Teorem 2.3.5 možemo iskazati ovako:

Teorem 2.3.8. *Neka su u ravnini dane $P \in AB$, $P' \in A'B'$, $Q, Q' \in PP'$ takve da je $(Q - P - P')$ i $(P - P' - Q')$. Ako je $\sphericalangle QPB \cong \sphericalangle PP'B'$, onda je $AB \parallel A'B'$.*

Korolar 2.3.9. *Kutovi iz Teorama 2.3.8, $\sphericalangle QPB$, $\sphericalangle PP'B'$, $\sphericalangle APP'$, $\sphericalangle A'P'Q'$ su sukladni. Također, kutovi $\sphericalangle QPA$, $\sphericalangle PP'A'$, $\sphericalangle BPP'$, $\sphericalangle B'P'Q'$ su sukladni.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz Teorema 2.2.12 i Teorema 2.2.14. □

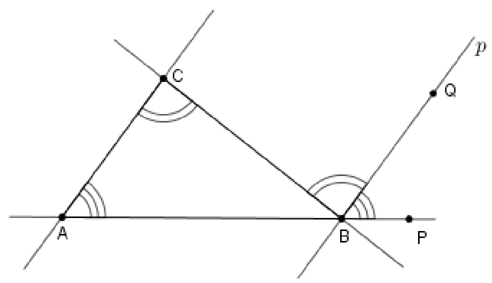
Definicija 2.3.10. *Pravac PP' iz Teorema 2.3.8 koji siječe pravce AB i $A'B'$ naziva se presječnica ili transverzala.*

Definicija 2.3.11. *Kutovi koje zatvaraju presječnica i paralelni pravci nazivaju se kutovima uz presječnicu.*

Nakon navedenih tvrdnji možemo dokazati Teorem 2.2.16. Provedimo dokaz:

Dokaz. Neka je dan trokut $\triangle ABC$. Proširimo stranice trokuta do pravaca. Neka je P točka na pravcu AB i neka $(A - B - P)$. Tada je kut $\sphericalangle CBP$ jedan vanjski kut trokuta $\triangle ABC$. Trebamo dokazati da je mjera kuta $\sphericalangle CBP$ jednaka zbroju mjera kutova $\sphericalangle BCA$ i $\sphericalangle CAB$. Analogan dokaz provodi se i za ostale vanjske kutove.

Povucimo paralelu p s pravcem AC kroz točku B. Tada su pravci AB i BC presječnice paralelnih pravaca AC i p. Neka je točka $Q \in p$ s one strane poluravnine s rubom AB s koje je i točka C.



Slika 2.29: Dokaz Teorema 2.2.16

Tada, prema Korolaru 2.3.9, vrijedi:

$$\sphericalangle CBQ \cong \sphericalangle BCA \quad \text{i} \quad \sphericalangle QBP \cong \sphericalangle CAB. \tag{2.21}$$

Kako je

$$|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle CBQ| + |\sphericalangle QBP|,$$

iz (2.21) slijedi:

$$|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle CAB|.$$

□

Na temelju definicije paralelnosti i aksioma V_E, možemo iskazati teoreme:

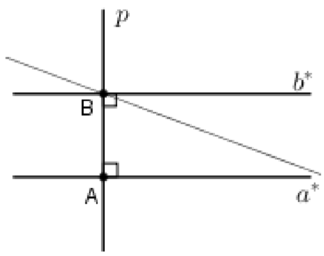
Teorem 2.3.12. *Zadani su pravci a, b i p takvi da $a \parallel b$, $a \neq p$ i $b \neq p$. Ako p siječe jedan od dva paralelna pravca, tada siječe i drugi.*

Dokaz. Neka $a \parallel b$ i $b \cap p = \{P\}$. Ako $a \cap p = \emptyset$, tada $a \parallel p$ pa iz tranzitivnosti slijedi $b \parallel p$ čime smo došli do kontradikcije. Dakle, ako $a \parallel b$ i $b \cap p = \{P\}$, tada $a \cap p = \{Q\}$. □

Specijalno:

Teorem 2.3.13. *Ako je $a \parallel b$, $a \perp p$, tada $b \perp p$.*

Dokaz. Neka je $a \parallel b$ i $a \perp p$. Označimo $a \cap p = \{A\}$. Prema Teoremu 2.3.12, tada p siječe i b. Označimo $b \cap p = \{B\}$. Neka su a^*, odnosno b^* polupravci pravaca a, odnosno b koji se nalaze s iste strane pravca p.
Ako $\neg(b \perp p)$, tada $|\sphericalangle a^*Ap| \neq |\sphericalangle b^*Bp|$. Prema Teoremu 2.3.8, ako $|\sphericalangle a^*Ap| = |\sphericalangle b^*Bp|$, tada $a \parallel b$, dok prema aksiomu V_E, za pravac a i točku $B \notin a$ postoji jedan i samo jedan pravac koji sadrži točku B, a ne siječe pravac a.
Iz navedenog zaključujemo da ako je $a \parallel b$ i $a \perp p$, tada mora vrijediti $|\sphericalangle a^*Ap| = |\sphericalangle b^*Bp|$, tj. $b \perp p$. □



Slika 2.30: Dokaz Teorema 2.3.13

Teorem 2.3.14. *Ako je $p \perp a$, $p \perp b$, tada $a \parallel b$.*

Dokaz. Dokaz teorema slijedi iz Teorema 2.3.8. □

Poglavlje 3

Izometrije

3.1 Osna simetrija

Definicija 3.1.1. *Neka je p proizvoljni pravac u ravnini α. Osna simetrija je preslikavanje koje svakoj točki $X \in \alpha$ pridružuje točku $X' \in \alpha$ tako da su zadovoljeni sljedeći uvjeti:*

(i) ako $X \in p$, $X = X'$

(ii) ako $X \notin p$, $X \neq X'$, $XX' \perp p$ i $\overline{X_0X} \cong \overline{X_0X'}$, gdje je $\{X_0\} = p \cap XX'$.

Označavat ćemo je s σ_p gdje je *p os simetrije*. Dakle: $\sigma_p(X) = X'$, $\sigma_p(A) = A'$, ...

Propozicija 3.1.2. *Kompozicija dviju osnih simetrija s istim osima je identiteta.*

Dokaz. Neka je σ_p osna simetrija obzirom na pravac p.
Ako $A \in p$, tada iz definicije osne simetrije slijedi:

$$\sigma_p(A) = A.$$

Kompozicija dviju osnih simetrija obzirom na pravac p tada je:

$$\sigma_p \circ \sigma_p(A) = \sigma_p(\sigma_p(A)) = \sigma_p(A) = A.$$

Iz toga zaključujemo:

$$\sigma_p \circ \sigma_p = i.$$

Ako $A \notin p$, tada

$$\sigma_p(A) = A'.$$

Tvrdimo:

$$\sigma_p \circ \sigma_p(A) = \sigma_p(\sigma_p(A)) = A.$$

Iz definicije osne simetrije vrijedi:

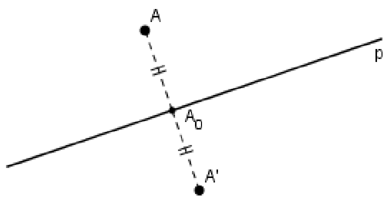
$$AA' \perp p, \quad \overline{AA_0} \cong \overline{A_0A'}, \quad p \cap AA' = \{A_0\},$$

pa iz toga slijedi i

$$\sigma_p(\sigma_p(A)) = \sigma_p(A') = A,$$

tj.

$$\sigma_p \circ \sigma_p = i.$$



Slika 3.1: Dokaz Propozicije 3.1.2

Dakle, točka A kompozicijom dviju osnih simetrija obzirom na istu os ne mijenja početni položaj. □

Dakle, inverz od σ_p je također σ_p:

$$\sigma_p^{-1} = \sigma_p \quad \text{ili} \quad \sigma_p \circ \sigma_p = i,$$

gdje je i identiteta.

Definicija 3.1.3. *Svako preslikavanje f za koje vrijedi $f \circ f = i$ je involucija.*

Prema tome, osna simetrija je involucija.

Iz definicije osne simetrije također se vidi da je

$$(\forall A_0)(A_0 \in p)(\sigma_p(A_0) = A_0),$$

tj. točke osi simetrije su fiksne točke.

Osim toga, ako je

$$\sigma_p(A) = A', \quad \sigma_p(B) = B',$$

tada je

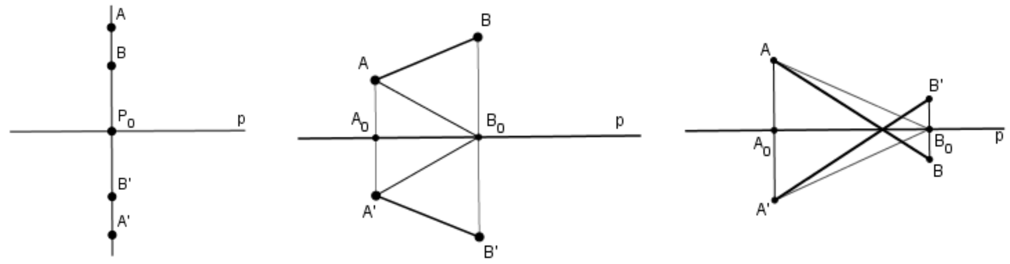
$$\sigma_p(AA') = A'A, \quad \sigma_p(BB') = B'B,$$

tj. pravac okomit na os simetrije preslikava se u taj isti pravac.

Vrijede i sljedeći teoremi:

Teorem 3.1.4. *Osna simetrija preslikava dužinu u sukladnu dužinu.*

Dokaz. Treba dokazati da iz $\sigma_p(A) = A'$ i $\sigma_p(B) = B'$, $A \neq B$ slijedi $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.



Slika 3.2: Dokaz Teorema 3.1.4

Ako je $AB \perp p$, sukladnost dužina posljedica je Teorema 2.1.9. Neka je $AB \cap p = \{P_0\}$. Iz definicije slijedi

$$\overline{AP_0} \cong \overline{A'P_0} \quad \text{i} \quad \overline{BP_0} \cong \overline{B'P_0}.$$

Teorem 2.1.9 povlači da je tada i

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}.$$

Ako $\neg(AB \perp p)$, tada $AA' \cap p = \{A_0\}$ i $BB' \cap p = \{B_0\}$.

Promotrimo slučaj kada su A i B s iste strane osi simetrije.
Primjenom Leme 2.1.11 i aksioma III_5 na trokute $\triangle AA_0B_0$ i $\triangle A'A_0B_0$ dobivamo

$$\overline{AB_0} \cong \overline{A'B_0} \quad \text{i} \quad \sphericalangle A_0B_0A \cong \sphericalangle A_0B_0A'.$$

Kako je $\sphericalangle A_0B_0B \cong \sphericalangle A_0B_0B'$, iz Leme 2.1.13 slijedi

$$\sphericalangle AB_0B \cong \sphericalangle A'B_0B'.$$

Primjenjujući na $\triangle AB_0B$ i $\triangle A'B_0B'$ Lemu 2.1.11, dobivamo

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}.$$

Neka su A i B s različitih strana osi simetrije.
Primjenom Leme 2.1.11 i aksioma III_5 na trokute $\triangle AA_0B_0$ i $\triangle A'A_0B_0$ dobivamo

$$\overline{AB_0} \cong \overline{A'B_0} \quad \text{i} \quad \sphericalangle A_0B_0A \cong \sphericalangle A_0B_0A'.$$

Promotrimo trokute $\triangle AB_0B$ i $\triangle A'B_0B'$. Kako je

$$\sphericalangle A_0B_0B' \cong \sphericalangle A_0B_0B \quad \text{i} \quad \sphericalangle A_0B_0A \cong \sphericalangle A_0B_0A',$$

to su zbog

$$|\sphericalangle A'B_0B'| = |\sphericalangle A_0B_0B'| + |\sphericalangle A'B_0A_0| \quad \text{i} \quad |\sphericalangle AB_0B| = |\sphericalangle A_0B_0B| + |\sphericalangle AB_0A_0|$$

kutovi

$$\sphericalangle AB_0B \cong \sphericalangle A'B_0B'.$$

Primjenjujući sada na $\triangle AB_0B$ i $\triangle A'B_0B'$ Lemu 2.1.11, dobivamo

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}.$$

□

Teorem 3.1.5. *Osna simetrija preslikava kolinearne točke u kolinearne točke, tj. za svaku osnu simetriju σ_p i točke A, B, C vrijedi*

$$(A - B - C) \Rightarrow (\sigma_p(A) - \sigma_p(B) - \sigma_p(C)).$$

Dokaz. Neka su A, B i C kolinearne točke. Tada je jedna od njih, prema aksiomu II_3, između preostale dvije, npr.

$$(A - B - C).$$

To znači da je

$$|AC| = |AB| + |BC|.$$

Ako je $\sigma_p(A) = A'$, $\sigma_p(B) = B'$ i $\sigma_p(C) = C'$, onda je, prema Teoremu 3.1.4,

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'}.$$

Tada je, prema definiciji zbroja,

$$|A'C'| = |A'B'| + |B'C'|.$$

To dokazuje kolinearnost točaka A', B' i C'.
Zaista, ako $B' \notin A'C'$, A', B' i C' su vrhovi trokuta, a prema Teoremu 2.2.23 kod svakog trokuta je duljina jedne stranice manja od zbroja duljina drugih dviju stranica. □

Korolar 3.1.6. *Neka je σ_p osna simetrija obzirom na pravac p. Ako je*

$$\sigma_p(A) = A' \quad i \quad \sigma_p(B) = B',$$

tada je

$$\sigma_p(\overline{AB}) = \overline{A'B'}.$$

Teorem 3.1.7. *Osna simetrija preslikava kut u sukladan kut.*

Dokaz. Neka je $\sigma_p(\sphericalangle ab) = \sphericalangle a'b'$. Ako je O vrh kuta $\sphericalangle ab$, tada je $O' = \sigma_p(O)$ vrh kuta $\sphericalangle a'b'$.
Neka je

$$A \in a, \quad B \in b, \quad A' = \sigma_p(A), \quad B' = \sigma_p(B).$$

Tada je, prema Teoremu 3.1.4,

$$\overline{OA} \cong \overline{O'A'}, \quad \overline{OB} \cong \overline{O'B'}, \quad \overline{A'B'} \cong \overline{A'B'}.$$

Prema Lemi 2.1.16, tada je

$$\sphericalangle AOB \cong \sphericalangle A'O'B', \quad \text{tj.} \quad \sphericalangle ab \cong \sphericalangle a'b'.$$

□

Na temelju Teorema 3.1.4, 3.1.5 i 3.1.7 zaključujemo da osna simetrija preslikava pravac u pravac, dužinu u sukladnu dužinu, kut u sukladan kut, trokut u sukladan trokut, a time i sve ostale likove u sukladne likove.

Teorem 3.1.8. *Neka je σ_a osna simetrija obzirom na pravac a. Ako je pravac b takav da $a \perp b$, onda je $\sigma_a(b) = b$.*

S obzirom na svojstva osne simetrije i definiciju simetrale dužine, možemo iskazati sljedeće teoreme:

Teorem 3.1.9. *Nužan i dovoljan uvjet da pravac s bude simetrala dužine $\overline{AB}$ je $\sigma_s(A) = B$. Za svaku točku $P \in s$, gdje je s simetrala dužine $\overline{AB}$, vrijedi $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.*

Obratno:

Teorem 3.1.10. *Ako je $\overline{AP} \cong \overline{BP}$, postoji pravac s takav da je $\sigma_s(A) = B$, $\sigma_s(P) = P$.*

Definicija 3.1.11. *Pravac s za koji vrijedi $\sigma_s(a) = b$, $O \in s$, gdje su a i b krakovi kuta $\sphericalangle ab$, a O njegov vrh, naziva se simetrala kuta $\sphericalangle ab$.*

3.2 Izometrije u ravnini

Definicija 3.2.1. *Neka je zadana ravnina α. Bijektivno preslikavanje $f : \alpha \to \alpha$ takvo da za svaki $A, B \in \alpha$*

$$\overline{f(A)f(B)} \cong \overline{AB},$$

zove se izometrija.

S obzirom na Teorem 3.1.4, zaključujemo da je osna simetrija izometrija.
Kako je sukladnost dužina tranzitivna relacija, vrijedi i:

Teorem 3.2.2. *Kompozicija dvije izometrije je izometrija.*

Dokaz. Neka su $A, B \in \alpha$ i neka je $f = f_2 \circ f_1$ kompozicija izometrija.
Neka je $f_1(A) = A_1$ i $f_1(B) = B_1$. Tada, iz definicije izometrije, slijedi:

$$\overline{AB} \cong \overline{A_1B_1}. \tag{3.1}$$

Nadalje, neka je $f_2(A_1) = A'$ i $f_2(B_1) = B'$. Tada, također iz definicije izometrije, slijedi:

$$\overline{A_1B_1} \cong \overline{A'B'}. \tag{3.2}$$

Koristeći činjenicu da je sukladnost dužina tranzitivna relacija, iz (3.1) i (3.2) zaključujemo da je

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}.$$

Time smo pokazali da preslikavanje f čuva udaljenost, odnosno preslikavanje f je izometrija. □

Koristeći matematičku indukciju, lako bismo pokazali da vrijedi:

Korolar 3.2.3. *Kompozicija konačnog broja izometrija je izometrija.*

Korolar 3.2.4. *Neka je f izometrija. Ako je*

$$f(A) = A' \quad i \quad f(B) = B',$$

onda je

$$f(\overline{AB}) = \overline{A'B'}.$$

Kako je osna simetrija izometrija, vrijedi:

Korolar 3.2.5. *Kompozicija konačnog broja osnih simetrija je izometrija.*

Teorem 3.2.6. *Izometrija preslikava kolinearne točke u kolinearne točke, tj. za svaku izometriju f i točke A, B, C vrijedi*

$$(A - B - C) \Rightarrow (f(A) - f(B) - f(C)).$$

Dokaz. Neka je f izometrija te neka su A, B, C kolinearne točke. Prema aksiomu II_2 tada je jedna od njih između preostale dvije, npr.

$$(A - B - C).$$

To znači da je

$$|AC| = |AB| + |BC|.$$

Ako je $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ i $f(C) = C'$, tada je, prema definiciji izometrije,

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'}.$$

Tada je, prema definiciji zbroja,

$$|A'C'| = |A'B'| + |B'C'|,$$

a to dokazuje kolinearnost točaka A', B' i C'.
Zaista, ako $B' \notin A'C'$, A', B' i C' su vrhovi trokuta, a prema Teoremu 2.2.23 kod svakog trokuta je duljina jedne stranice manja od zbroja duljina drugih dviju stranica. □

Teorem 3.2.7. *Ako je f izometrija, onda je i f^{-1} izometrija.*

Dokaz. Neka je f izometrija. Tada za svaki A, B vrijedi

$$\overline{f(A)f(B)} \cong \overline{AB}. \tag{3.3}$$

Neka je f^{-1} inverz funkcije f. Tada, koristeći činjenicu da je f izometrija, imamo:

$$\overline{f^{-1}(A)f^{-1}(B)} \cong \overline{f(f^{-1}(A))f(f^{-1}(B))},$$

a koristeći svojstva inverznih funkcija, imamo:

$$f(f^{-1}(A)) = A \quad \text{i} \quad f(f^{-1}(B)) = B$$

pa slijedi

$$\overline{f^{-1}(A)f^{-1}(B)} \cong \overline{AB}.$$

Time dolazimo do zaključka da je i f^{-1} izometrija.

□

Teorem 3.2.8. *Ako je π kompozicija osnih simetrija, onda je i π^{-1} kompozicija osnih simetrija.*

Dokaz. Neka su σ_1, σ_2, ..., σ_k osne simetrije i neka je $\pi = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ ... \circ \sigma_k$. Koristeći asocijativnost i uzimajući u obzir da je osna simetrija involucija, imamo:

$$\begin{aligned}
&(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ ... \circ \sigma_k) \circ (\sigma_k \circ ... \circ \sigma_2 \circ \sigma_1)\\
&= (\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ ... \circ \sigma_{k-1}) \circ (\sigma_k \circ \sigma_k) \circ (\sigma_{k-1} \circ ... \circ \sigma_2 \circ \sigma_1)\\
&= (\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ ... \circ \sigma_{k-1}) \circ (\sigma_{k-1} \circ ... \circ \sigma_2 \circ \sigma_1)\\
&= \dots\\
&= \sigma_1 \circ \sigma_1\\
&= i.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\pi^{-1} = (\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ ... \circ \sigma_k)^{-1} = \sigma_k \circ ... \circ \sigma_2 \circ \sigma_1,$$

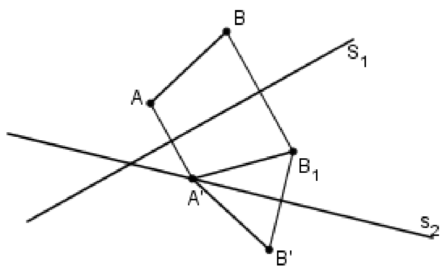
tj. ako je preslikavanje π kompozicija osnih simetrija, onda je i π^{-1} kompozicija osnih simetrija. □

Također, vrijedi i obrat Korolara 3.2.5. Prije iskaza i dokaza, dokazat ćemo nekoliko pomoćnih teorema.

Lema 3.2.9. *Ako $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, tada postoji kompozicija osnih simetrija π takva da je*

$$\pi(\overline{AB}) = \overline{A'B'}.$$

Dokaz. Neka je s_1 simetrala $\overline{AA'}$ i neka je $B_1 = \sigma_{s_1}(B)$.



Slika 3.3: Dokaz Leme 3.2.9

Prema Korolaru 3.1.6, tada je

$$\sigma_{s_1}(\overline{AB}) = \overline{A'B_1}, \quad \text{tj.} \quad \overline{A'B_1} \cong \overline{AB}.$$

Kako je, iz uvjeta leme, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, koristeći tranzitivnost, dobivamo

$$\overline{A'B_1} \cong \overline{A'B'}.$$

Iz Teorema 3.1.10 slijedi da postoji pravac s_2 takav da je

$$\sigma_{s_2}(A') = A' \quad \text{i} \quad \sigma_{s_2}(B_1) = B'. \tag{3.4}$$

Dakle, iz (3.4) i Korolara 3.2.4 slijedi

$$(\sigma_{s_2} \circ \sigma_{s_1})(\overline{AB}) = \overline{A'B'}.$$

□

Lema 3.2.10. *Dani su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$. Ako je*

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'},$$

tada postoji kompozicija osnih simetrija π takva da je

$$\pi(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'.$$

Dokaz. Prema Lemi 3.2.9, postoji kompozicija $\sigma_{s_2} \circ \sigma_{s_1}$ takva da je

$$(\sigma_{s_2} \circ \sigma_{s_1})(\overline{AB}) = \overline{A'B'}.$$

Stavimo

$$(\sigma_{s_2} \circ \sigma_{s_1})(C) = C_2.$$

Tada je

$$(\sigma_{s_2} \circ \sigma_{s_1})(\overline{AC}) = \overline{A'C_2} \quad \text{i} \quad (\sigma_{s_2} \circ \sigma_{s_1})(\overline{BC}) = \overline{B'C_2},$$

tj.

$$\overline{A'C_2} \cong \overline{AC} \quad \text{i} \quad \overline{B'C_2} \cong \overline{BC}.$$

Koristeći tranzitivnost, imamo

$$\overline{A'C_2} \cong \overline{A'C'} \quad \text{i} \quad \overline{B'C_2} \cong \overline{B'C'}.$$

Iz prve sukladnosti, prema Teoremu 3.1.10, slijedi da simetrala $\overline{C'C_2}$ sadrži točku A', a iz druge slijedi da ta simetrala sadrži i točku B', tj.

$$\sigma_{s_3}(C_2) = C, \quad \text{gdje je} \quad s_3 = A'B'.$$

Iz navedenog zaključujemo da vrijedi:

$$(\sigma_{s_3} \circ \sigma_{s_2} \circ \sigma_{s_1})(\overline{AB}) = \overline{A'B'}, \quad (\sigma_{s_3} \circ \sigma_{s_2} \circ \sigma_{s_1})(\overline{AC}) = \overline{A'C'}, \quad (\sigma_{s_3} \circ \sigma_{s_2} \circ \sigma_{s_1})(\overline{BC}) = \overline{B'C'}.$$

Neka je T proizvoljna točka u unutrašnjosti $\triangle ABC$. Prema Teoremu 2.1.10, ako je točka T u unutrašnjosti $\triangle ABC$, tada postoji točka Q takva da je

$$AT \cap \overline{BC} = \{Q\}.$$

Kako je

$$(\sigma_{s_3} \circ \sigma_{s_2} \circ \sigma_{s_1})(\overline{BC}) = \overline{B'C'} \quad \text{i} \quad (B - Q - C),$$

prema Teoremu 3.2.6 slijedi

$$(\sigma_{s_3} \circ \sigma_{s_2} \circ \sigma_{s_1})(Q) = Q' \quad \text{i} \quad (B' - Q' - C').$$

Također je tada

$$(\sigma_{s_3} \circ \sigma_{s_2} \circ \sigma_{s_1})(\overline{AQ}) = A'Q'.$$

Zbog

$$(\sigma_{s_3} \circ \sigma_{s_2} \circ \sigma_{s_1})(\overline{AQ}) = \overline{A'Q'} \quad \text{i} \quad (A - T - Q),$$

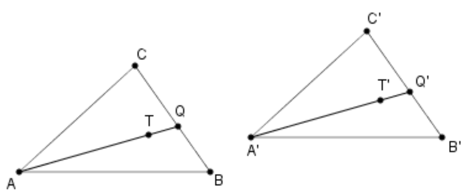
prema Teoremu 3.2.6 slijedi

$$(\sigma_{s_3} \circ \sigma_{s_2} \circ \sigma_{s_1})(T) = T' \quad \text{i} \quad (A' - T' - Q').$$

Kako je T proizvoljna točka unutrašnjosti trokuta $\triangle ABC$, dobiveni rezultat vrijedi za svaku točku u trokutu. Iz svega navedenog zaključujemo da je

$$(\sigma_{s_3} \circ \sigma_{s_2} \circ \sigma_{s_1})(\triangle ABC) = \triangle A'B'C', \quad \text{tj.} \quad \pi = \sigma_{s_3} \circ \sigma_{s_2} \circ \sigma_{s_1}.$$

□



Slika 3.4: Dokaz Leme 3.2.10

Teorem 3.2.11. *Svaka izometrija je kompozicija konačnog broja osnih simetrija.*

Dokaz. Ako je $f : \alpha \to \alpha$ izometrija, a $\triangle ABC$ proizvoljan trokut, onda je

$$\overline{f(A)f(B)} \cong \overline{AB}, \quad \overline{f(A)f(C)} \cong \overline{AC}, \quad \overline{f(B)f(C)} \cong \overline{BC}.$$

Na temelju Leme 3.2.10, postoji kompozicija osnih simetrija π takva da je

$$\pi(\triangle f(A)f(B)f(C)) = \triangle ABC,$$

tj. takva da je

$$(\pi \circ f)(A) = A, \quad (\pi \circ f)(B) = B, \quad (\pi \circ f)(C) = C. \tag{3.5}$$

Pokazat ćemo da je

$$(\forall P)(P \in \alpha)((\pi \circ f)(P) = P).$$

Pretpostavimo prvo da

$$P \notin AB, \ P \notin BC, \ P \notin AC \tag{3.6}$$

i promatrajmo $\triangle((\pi \circ f)(A)(\pi \circ f)(B)(\pi \circ f)(P))$ i $\triangle ABP$. Uzimajući u obzir (3.5), odmah vidimo da je

$$\overline{(\pi \circ f)(P)A} \cong \overline{PA}, \quad \overline{(\pi \circ f)(P)B} \cong \overline{PB}.$$

Ako $(\pi \circ f)(P) = P'$, tada

$$\overline{P'A} \cong \overline{PA} \quad \text{i} \quad \overline{P'B} \cong \overline{PB}.$$

Iz navedenih sukladnosti i prema Teoremu 3.1.10 slijedi da simetrala $\overline{PP'}$ sadrži točku A i točku B, tj.

$$\sigma_{AB}((\pi \circ f)(P)) = P.$$

Pa zaključujemo ako je $\overline{(\pi \circ f)(P)A} \cong \overline{PA}$, $\overline{(\pi \circ f)(P)B} \cong \overline{PB}$, tada je

$$\text{ili} \quad (\pi \circ f)(P) = P \quad \text{ili} \quad \sigma_{AB}((\pi \circ f)(P)) = P.$$

Isto tako, promatrajući $\triangle((\pi \circ f)(A)\ (\pi \circ f)(C)\ (\pi \circ f)(P))$ i $\triangle ACP$, dobivamo

$$\text{ili} \quad (\pi \circ f)(P) = P \quad \text{ili} \quad (\sigma_{AC}(\pi \circ f)(P)) = P.$$

Uzimajući u obzir (3.6) i činjenicu da $AB \neq AC$, ako

$$\sigma_{AB}(\pi \circ f(P)) = P \quad \text{i} \quad \sigma_{AC}(\pi \circ f(P)) = P,$$

$\overline{PP'}$ imala bi dvije simetrale, simetralu AB i simetralu AC što je u suprotnosti s Korolarom 2.3.4.

Zbog toga zaključujemo da mora vrijediti

$$(\pi \circ f)(P) = P.$$

Pokažimo sada da je i $(\pi \circ f)(P) = P$ ako neki od uvjeta (3.6) nije zadovoljen.
Pretpostavimo da je $P \in AB$ te neka je $(A - P - B)$.
Na temelju Leme 3.2.9, postoji kompozicija osnih simetrija π takva da je

$$\pi(\overline{f(A)f(B)}) = \overline{AB},$$

tj. takva da je

$$(\pi \circ f)(A) = A, \quad (\pi \circ f)(B) = B.$$

Prema Teoremu 3.2.6, izometrija kolinearne točke preslikava u kolinearne točke pa je uvjet $(\pi \circ f)(P) = P$ zadovoljen za svaku točku $P \in \alpha$, tj. $\pi \circ f$ je identiteta pa je $f = \pi^{-1}$.

□

Definicija 3.2.12. *Izometrija je direktna izometrija ili pomak ako je ona kompozicija parnog broja osnih simetrija, a indirektna izometrija ako je kompozicija neparnog broja osnih simetrija.*

Iz dokaza prethodnog teorema slijedi i:

Teorem 3.2.13. *Ako su A, B i C te A', B' i C' nekolinearne točke u ravnini takve da*

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'},$$

tada postoji jedinstvena izometrija f za koju vrijedi

$$f(A) = A', \quad f(B) = B', \quad f(C) = C'.$$

Također, iz dokaza Leme 3.2.10 i Teorema 3.2.11 slijedi ključan teorem o izometrijama koji glasi:

Teorem 3.2.14. *Svaka izometrija može se prikazati kao kompozicija najviše tri osne simetrije.*

Za daljnja razmatranja važan je i ovaj teorem:

Teorem 3.2.15. *Ako izometrija preslikava polupravac na taj isti polupravac, onda je ona ili identiteta ili osna simetrija.*

Dokaz. Neka je a polupravac s početnom točkom A, a f izometrija i neka je $f(a) = a$.
Tada je

$$f(A) = A \quad \text{i} \quad (\forall B)(B \in a)(f(B) = B).$$

Zaista, $f(B) \in a$.
Uz to,

$$\overline{AB} \cong \overline{Af(B)},$$

pa, koristeći Teorem 2.1.8, mora biti

$$f(B) = B.$$

Kako je f bijekcija i, prema Teoremu 3.2.6, kolinearne točke preslikava u kolinearne, slijedi

$$f(a^*) = a^*.$$

Iz toga odmah slijedi da se pri preslikavanju f pravac $p = a \cup a^* \cup A$ preslikava sam na sebe.
Nadalje, uočimo točku $C \notin p$ i neka je $f(C) = C'$. Tada je

$$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C'AB \quad \text{i} \quad \overline{AC} \cong \overline{AC'}.$$

Točke A, B, C nisu kolinearne. Prema Teoremu 3.2.13, preslikavanje f je određeno $\triangle ABC$ i $\triangle ABC'$.
Ako su C i C' s iste strane pravca p, zbog $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C'AB$, C' se mora nalaziti na polupravcu AC s početkom u točki A. Dalje, zbog $\overline{AC} \cong \overline{AC'}$ i zbog Teorema 2.1.8, mora vrijediti

$$C = C'.$$

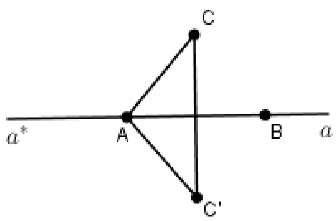
Tada je f identiteta.
Ako su C i C' s različitih strana pravca p, pravac p je tada os simetrije $\overline{CC'}$. Dakle

$$\sigma_p(A) = A, \quad \sigma_p(B) = B \quad \text{i} \quad \sigma_p(C) = C',$$

tj. preslikavanje σ_p je određeno trokutima $\triangle ABC$ i $\triangle ABC'$ pa je

$$f = \sigma_p.$$

□



Slika 3.5: Dokaz Teorema 3.2.15

3.3 Sukladnost trokuta

Definicija 3.3.1. *Neka su likovi F i F' sadržani u istoj ravnini. Lik F je sukladan s likom F' ako postoji izometrija f takva da je $f(F) = F'$. Zapisujemo ovako: $F \cong F'$.*

Teorem 3.3.2. *Sukladnost likova je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. 1° *refleksivnost*
Prema Korolaru 3.2.5 kompozicija $\sigma_p \circ \sigma_p = i = \pi$ je izometrija pa je relacija refleksivna, tj. $F \cong F$ jer
$$F = i(F) = \sigma_p \circ \sigma_p(F) = \pi(F).$$

2° *simetričnost*
Ako je $F \cong F'$, tada postoji izometrija π takva da je $\pi(F) = F'$. Po Teoremu 3.2.7 π^{-1} je izometrija. Prema tome

$$F = i(F) = \pi^{-1} \circ \pi(F) = \pi^{-1}(F'), \text{ tj. } F \cong F' \Rightarrow F' \cong F,$$

čime smo dokazali simetričnost.
3° *tranzitivnost*
Dokažimo i da je relacija tranzitivna, tj. $(F \cong F' \wedge F' \cong F'') \Rightarrow F \cong F''$.
Uvjet $F \cong F'$ znači da postoji izometrija π takva da je $\pi(F) = F'$. Uvjet $F' \cong F''$ znači da postoji izometrija π_1 takva da je $\pi_1(F') = F''$. Tada je $\pi_1 \circ \pi(F) = F''$ pri čemu je, prema Korolaru 3.2.3, $\pi_1 \circ \pi$ izometrija. □

Lemu 3.2.10 sada možemo iskazati ovako:

Teorem 3.3.3. *($S - S - S$ teorem o sukladnosti trokuta) Zadani su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$. Ako je*
$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'},$$
tada je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Također, vrijede i ovi teoremi:

Teorem 3.3.4. *Ako je $\sphericalangle ab \cong \sphericalangle a'b'$, tada postoji izometrija f takva da je $f(\sphericalangle ab) \cong \sphericalangle a'b'$. Izometrija f preslikava unutarnje područje $\sphericalangle ab$ u unutarnje područje $\sphericalangle a'b'$.*

Teorem 3.3.5. *($S - K - S$ teorem o sukladnosti trokuta) Zadani su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$. Ako je*
$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \quad \sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C'A'B',$$
tada je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

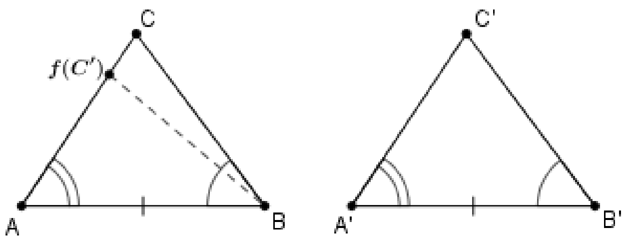
Dokaz. Kako je $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C'A'B'$, postoji izometrija f takva da je $f(\sphericalangle C'A'B') = \sphericalangle CAB$. To, dalje, znači da se $f(C')$ nalazi na polupravcu AC s početkom u točki A, a kako je $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, to je $f(C') = C$. Na isti način je i $f(B') = B$, stoga je i $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ pa je, prema Teoremu 3.3.3, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. □

Teorem 3.3.6. *($K - S - K$ teorem o sukladnosti trokuta) Zadani su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$. Ako je*

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C', \quad \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C',$$

tada je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Dokaz. Kako je $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$, postoji izometrija f takva da je $f(\sphericalangle B'A'C') = \sphericalangle BAC$. To, dalje, znači da se $f(B')$ nalazi na polupravcu AB s početkom u točki A, a $f(C')$ na polupravcu AC s početkom u točki A. Kako je $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, to je $f(B') = B$.
Pretpostavimo da je $f(C')$ takva da $(A - f(C') - C)$.



Slika 3.6: Dokaz Teorema 3.3.6

Tada $\sphericalangle A'B'C' \cong \sphericalangle ABf(C')$. Iz tranzitivnosti dalje slijedi $\sphericalangle ABf(C') \cong \sphericalangle ABC$. Iz toga zaključujemo da se $f(C')$ nalazi i na polupravcu BC s početkom u točki B. Kako se $f(C')$ nalazi na polupravcu AC i na polupravcu BC, slijedi da je $f(C') = C$.
Isti zaključak slijedio bi i za $(A - C - f(C'))$.
Stoga je $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ i $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ pa je, prema Teoremu 3.3.3, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. □

Teorem 3.3.7. *($S - S - K^{>}$ teorem o sukladnosti trokuta) Zadani su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$. Ako je*

$$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'}, \quad |AC| > |BC|, \quad \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C',$$

tada je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Dokaz. Prema Teoremu 2.2.22, iz $|AC| > |BC|$ slijedi

$$|\sphericalangle ABC| > |\sphericalangle BAC|. \tag{3.7}$$

S druge strane, kako je $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$, postoji izometrija f takva da je $f(\sphericalangle A'B'C') = \sphericalangle ABC$. To, dalje, znači da se $f(C')$ nalazi na polupravcu BC s početkom u točki B, a kako je $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, to je $fC') = C$. Slično vrijedi i za $A_1 = f(A')$. Točka A_1 nalazi se na polupravcu BA s početkom u točki B i $\overline{B'A'} \cong \overline{BA_1}$. Lema 2.1.11 povlači da je $\overline{A'C'} \cong \overline{A_1C}$, a tranzitivnost $\overline{AC} \cong \overline{A_1C}$. Primjenom Leme 2.1.14 na $\triangle AA_1C$ dobivamo

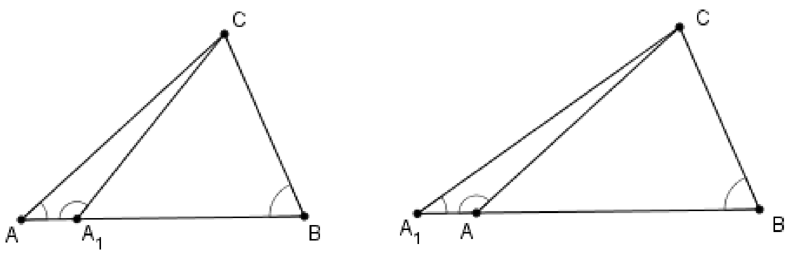
$\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle CA_1A$.
Ako je $(A - A_1 - B)$, $\sphericalangle CA_1A$ je vanjski kut $\triangle CA_1B$ pa je

$$|\sphericalangle CA_1A| > |\sphericalangle A_1BC|, \text{ pa je } |\sphericalangle BAC| > |\sphericalangle ABC|,$$

što je u suprotnosti s (3.7).
Ako je $(A_1 - A - B)$, $\sphericalangle A_1AC$ je vanjski kut $\triangle CBA$ pa je

$$|\sphericalangle A_1AC| > |\sphericalangle ABC|, \text{ pa je } |\sphericalangle BA_1C| > |\sphericalangle ABC|.$$

Međutim, kako je $\overline{AC} \cong \overline{A_1C}$, iz $|AC| > |BC|$ slijedi $|A_1C| > |BC|$, a onda i $|\sphericalangle BA_1C| < |\sphericalangle ABC|$. Dakle, ne može biti ni $(A_1 - A - B)$ pa kako su A i A_1 s iste strane točke B na polupravcu BA, mora biti $A_1 = A$, tj. $f(A') = A$. Prema tome, $f(\triangle A'B'C') = \triangle ABC$. □



Slika 3.7: Dokaz Teorema 3.3.7

3.4 Ostale izometrije

Kroz daljnja razmatranja često ćemo koristiti i ovaj teorem:

Teorem 3.4.1. *Za svaku izometriju π i svaki pravac p je*

$$\sigma_{\pi(p)} = \pi \circ \sigma_p \circ \pi^{-1}.$$

Dokaz. Neka je $X \in \pi(p)$. Tada je $\pi^{-1}(X) \in p$ i stoga se pri osnoj simetriji σ_p točka $\pi^{-1}(X)$ preslikava na samu sebe:

$$\sigma_p(\pi^{-1}(X)) = \pi^{-1}(X).$$

Odakle je

$$\pi \circ \sigma_p \circ \pi^{-1}(X) = X.$$

Dakle, pri preslikavanju $\sigma_{\pi(p)} = \pi \circ \sigma_p \circ \pi^{-1}$ svaka točka pravca $\pi(p)$ preslikava se na samu sebe. Iz Teorema 3.2.15 slijedi da je $\pi \circ \sigma_p \circ \pi^{-1}$ ili identiteta ili osna simetrija s osi $\pi(p)$. Ako je $\pi \circ \sigma_p \circ \pi^{-1}$ identiteta, možemo pisati

$$\pi \circ \sigma_p \circ \pi^{-1} = \pi \circ \pi^{-1},$$

odakle je

$$\sigma_p = (\pi^{-1} \circ \pi) \circ \sigma_p \circ (\pi^{-1} \circ \pi) = (\pi^{-1} \circ \pi) \circ (\pi^{-1} \circ \pi) = i,$$

tj. σ_p je identiteta. Međutim, prema definiciji osne simetrije, to ne može biti. □

Zanimljiv je i ovaj teorem:

Teorem 3.4.2. *Neka su a i b dva pravca. Vrijedi $a \perp b$ ako i samo ako je $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_b \circ \sigma_a$.*

Dokaz. Prema Teoremu 3.1.8, ako $a \perp b$, onda je $\sigma_a(b) = b$, pa, koristeći Teorem 3.4.1, imamo

$$\sigma_b = \sigma_{\sigma_a(b)} = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_a.$$

Odakle je

$$\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \sigma_b.$$

Obratno, neka je

$$\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \sigma_b.$$

Tada je

$$\sigma_a = \sigma_b \circ \sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_b \circ \sigma_a \circ \sigma_b^{-1},$$

pa primjenjujući Teorem 3.4.1, dobivamo $\sigma_a = \sigma_{\sigma_b(a)}$ što znači da je $a = \sigma_b(a)$ pa je $a \perp b$. □

Lema 3.4.3. *Kompozicija dvije osne simetrije ne može biti osna simetrija.*

Dokaz. Neka su σ_a i σ_b osne simetrije.
Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da postoji pravac c takav da je

$$\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_c.$$

Ako $P \in c$, onda je $\sigma_c(P) = P$ pa je

$$\sigma_b \circ \sigma_a(P) = P, \quad \text{tj.} \quad \sigma_a(P) = \sigma_b(P) = P'.$$

Uvjet $\sigma_a(P) = P'$ pokazuje da je pravac a simetrala $\overline{PP'}$, a uvjet $\sigma_b(P) = P'$ pokazuje da je i pravac b simetrala te iste dužine. Simetrala dužine, prema Korolaru 2.3.4, jednoznačno je određena pa mora biti $a = b$. Međutim, tada imamo

$$\sigma_a \circ \sigma_a = i = \sigma_c,$$

a to je u suprotnosti s definicijom osne simetrije. □

Teorem 3.4.4. *Kompozicija triju osnih simetrija s osima koje se sijeku u istoj točki O je osna simetrija čija os prolazi kroz točku O.*

Dokaz. Neka su a, b i c pravci koji se sijeku u točki O.
Označimo s a_1 jedan polupravac pravca a s početkom u točki O i neka je

$$\sigma_c \circ \sigma_b(a_1) = a_1'.$$

Ako je s simetrala $\sphericalangle a_1 a_1'$, i ona sadrži točku O. Također, po definiciji 3.1.11, tada vrijedi

$$\sigma_s(a_1') = a_1$$

pa je

$$\sigma_s \circ \sigma_c \circ \sigma_b(a_1) = a_1.$$

Na temelju Teorema 3.2.15, preslikavanje

$$\sigma_s \circ \sigma_c \circ \sigma_b$$

je ili osna simetrija ili identiteta.
Ako je

$$\sigma_s \circ \sigma_c \circ \sigma_b = i,$$

onda je

$$\sigma_c \circ \sigma_b = \sigma_s,$$

a to, prema Lemi 3.4.3, ne može biti. Dakle, $\sigma_s \circ \sigma_c \circ \sigma_b$ je osna simetrija.
Kako je $\sigma_s \circ \sigma_c \circ \sigma_b(a_1) = a_1$, os te simetrije mora biti pravac koji sadrži polupravac a_1 pa vrijedi

$$\sigma_s \circ \sigma_c \circ \sigma_b = \sigma_a.$$

Odakle je

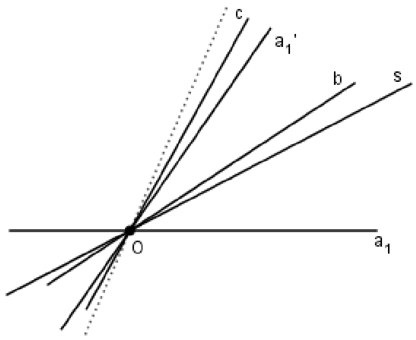
$$\sigma_s \circ \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = i, \quad \text{tj.} \quad \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_s.$$

□

3.5 Rotacija

Definicija 3.5.1. *Kompoziciju dvije osne simetrije $\sigma_b \circ \sigma_a$ čije se osi sijeku u nekoj točki O nazivamo rotacijom.*

Definicija 3.5.2. *Točka O iz definicije 3.5.1 naziva se centar rotacije.*



Slika 3.8: Dokaz Teorema 3.4.4

Dakle, rotaciju određuje uređeni par pravaca koji se sijeku. Jedan od tih pravaca, koji sadrži točku presjeka, možemo proizvoljno izabrati. Prije nego što dokažemo tu tvrdnju, dokažimo sljedeći teorem:

Teorem 3.5.3. *Neka se pravci a, b, c i d sijeku u točki O. Kompozicija osnih simetrija* $\sigma_b \circ \sigma_a$ *jednaka je kompoziciji osnih simetrija* $\sigma_d \circ \sigma_c$ *ako postoji kompozicija parnog broja osnih simetrija, sa osima koje se također sijeku u točki O, a koja preslikava prvi par pravaca u drugi.*

Dokaz. Promatrajmo rotacije $\sigma_b \circ \sigma_a$ i $\sigma_d \circ \sigma_c$ s centrom O. Pretpostavimo da postoje pravci m i n koji također sadrže točku O i za koje vrijedi

$$c = \sigma_m \circ \sigma_n(a), \quad d = \sigma_m \circ \sigma_n(b). \tag{3.8}$$

Preslikavanje $\sigma_m \circ \sigma_n$ je ono o kojem se govori u teoremu. Prema dokazu Teorema 3.2.14 svaka se izometrija može prikazati kao kompozicija najviše tri osne simetrije. To znači da se kompozicija parnog broja osnih simetrija može svesti na kompoziciju dvije osne simetrije. Ostaje dokazati da je

$$\sigma_d \circ \sigma_c = \sigma_b \circ \sigma_a. \tag{3.9}$$

Primijetimo da je, prema Teoremu 3.4.1,

$$\sigma_c = \sigma_{\sigma_m \circ\, \sigma_n(a)} = (\sigma_m \circ \sigma_n) \circ \sigma_a \circ (\sigma_m \circ \sigma_n)^{-1} = \sigma_m \circ \sigma_n \circ \sigma_a \circ \sigma_n \circ \sigma_m.$$

Slično je i:

$$\sigma_d = \sigma_m \circ \sigma_n \circ \sigma_b \circ \sigma_n \circ \sigma_m,$$

pa je

$$\sigma_d \circ \sigma_c = (\sigma_m \circ \sigma_n \circ \sigma_b \circ \sigma_n \circ \sigma_m) \circ (\sigma_m \circ \sigma_n \circ \sigma_a \circ \sigma_n \circ \sigma_m) = (\sigma_m \circ \sigma_n \circ \sigma_b) \circ (\sigma_a \circ \sigma_n \circ \sigma_m).$$

Pravci a, m, n prolaze kroz točku O pa je, prema Teoremu 3.4.4, $\sigma_a \circ \sigma_n \circ \sigma_m$ osna simetrija. Kako je osna simetrija jednaka svom inverzu, vrijedi:

$$\sigma_a \circ \sigma_n \circ \sigma_m = \sigma_m \circ \sigma_n \circ \sigma_a.$$

Iz istih razloga je i:

$$\sigma_m \circ \sigma_n \circ \sigma_b = \sigma_b \circ \sigma_n \circ \sigma_m.$$

Dakle

$$\sigma_d \circ \sigma_c = (\sigma_b \circ \sigma_n \circ \sigma_m) \circ (\sigma_m \circ \sigma_n \circ \sigma_a) = \sigma_b \circ \sigma_a.$$

□

Teorem 3.5.4. *Rotacija je određena uređenim parom pravaca od kojih se jedan, koji prolazi kroz centar rotacije, može proizvoljno izabrati.*

Dokaz. Uočimo rotaciju $\sigma_b \circ \sigma_a$. Njen centar je $a \cap b = \{O\}$. Označimo sa a_1 jedan od dva polupravaca koje, na a, određuje točka O. Neka je c proizvoljan pravac koji sadrži O. Označimo sa c_1 jedan od dva polupravaca koje, na c, određuje točka O. Na kraju, neka je s simetrala $\sphericalangle a_1 c_1$. Tada je

$$\sigma_s(a) = c, \quad \sigma_c \circ \sigma_s(a) = c,$$

pa ako stavimo

$$\sigma_c \circ \sigma_s(b) = d,$$

pravac d prolazi također kroz O i na temelju prethodnog teorema je

$$\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_d \circ \sigma_c.$$

Ako je b_1 polupravac pravca b s početkom O, a s_1 simetrala $\sphericalangle b_1 c_1$, tada je

$$\sigma_{s_1}(b) = c, \quad \sigma_c \circ \sigma_{s_1}(b) = c,$$

pa ako stavimo

$$\sigma_c \circ \sigma_{s_1}(a) = d_1,$$

na temelju prethodnog teorema imamo

$$\sigma_c \circ \sigma_{d_1} = \sigma_b \circ \sigma_a.$$

Unaprijed dan pravac c može, dakle, biti prvi ili drugi pravac u uređenom paru. □

3.6 Centralna simetrija

Definicija 3.6.1. *Rotaciju $\sigma_b \circ \sigma_a$ pri čemu je $a \perp b$, $a \cap b = \{O\}$ nazivamo centralnom simetrijom. Označavamo je sa σ_O.*

Definicija 3.6.2. *Točka O iz definicije 3.6.1 naziva se centar simetrije.*

Specijalni slučaj Teorema 3.5.4 je teorem:

Teorem 3.6.3. *Centralna simetrija je određena proizvoljnim parom okomitih pravaca od kojih svaki sadrži centar simetrije.*

Prema Teoremu 3.4.2, ako je $a \perp b$, onda je

$$\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \sigma_b$$

i obratno, pa je

$$\sigma_O = \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \sigma_b$$

Iz toga, dalje, imamo:

$$\sigma_O \circ \sigma_O = (\sigma_a \circ \sigma_b) \circ (\sigma_b \circ \sigma_a) = i.$$

Time dolazimo do sljedećeg teorema:

Teorem 3.6.4. *Centralna simetrija je involucija.*

Neka je A proizvoljna točka ravnine i $A \neq O$. Neka je $a = AO$, a b pravac okomit na a koji prolazi kroz O. Tada je

$$\sigma_O(a) = \sigma_a \circ \sigma_b(a) = \sigma_a(a) = a,$$

$$\sigma_O(A) = \sigma_a \circ \sigma_b(A) = \sigma_a(A') = A'.$$

Kako je $A' = \sigma_b(A)$, O je središte $\overline{AA'}$. Prema tome, vrijedi:

Teorem 3.6.5. *Centralna simetrija preslikava svaki pravac koji sadrži centar simetrije u taj isti pravac.*

Teorem 3.6.6. *Centar simetrije je polovište svake dužine koja je određena parom odgovarajućih točaka.*

Teorem 3.6.5 može se iskazati i ovako:

Teorem 3.6.7. *Vrijedi $\sigma_O \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \sigma_O$ ako i samo ako $O \in a$.*

Dokaz. Ako je $O \in a$, onda je $\sigma_O(a) = a$ i, prema tome, $\sigma_{\sigma_O(a)} = \sigma_a$.
Ako u formuli iz Teorema 2.2.20

$$\sigma_{\pi(p)} = \pi \circ \sigma_p \circ \pi^{-1} \tag{3.10}$$

stavimo $\pi = \sigma_O$, imamo

$$\sigma_a = \sigma_O \circ \sigma_a \circ \sigma_O,$$

tj.

$$\sigma_a \circ \sigma_O = \sigma_O \circ \sigma_a.$$

Obratno,

$$\sigma_a \circ \sigma_O = \sigma_O \circ \sigma_a \Rightarrow \sigma_a = \sigma_O \circ \sigma_a \circ \sigma_O,$$

pa koristeći (3.10), dobivamo $\sigma_{\sigma_O(a)} = \sigma_a$.
Iz toga slijedi $\sigma_O(a) = a$, tj., prema Teoremu 3.7.8, $O \in a$. □

3.7 Translacija

Definicija 3.7.1. *Kompoziciju dvije osne simetrije $\sigma_b \circ \sigma_a$ s paralelnim osima nazivamo translacijom.*

Prema ovoj definiciji, translacija je određena uređenim parom međusobno paralelnih pravaca.

Teorem 3.7.2. *Neka su a, b, c i d međusobno paralelni pravci. Kompozicija osnih simetrija $\sigma_b \circ \sigma_a$ jednaka je kompoziciji $\sigma_d \circ \sigma_c$ ako postoji kompozicija parnog broja osnih simetrija, sa osima koje su također paralelne sa zadanim pravcima, a koja preslikava prvi par pravaca u drugi.*

Ovaj teorem tvrdi za translaciju ono što Teorem 3.5.3 za rotaciju.
Dokaz je analogan dokazu tog teorema. Pravci m i n u ovom slučaju su paralelni s osima a i b. Također se uvedu oznake (3.8) i opet se dobije (3.9).

Teorem 3.7.3. *Translacija je određena uređenim parom pravaca od kojih se jedan, u određenom smjeru, može proizvoljno izabrati.*

Ovaj teorem tvrdi za translaciju ono što Teorem 3.5.4 za rotaciju.
Dokaz je analogan dokazu tog teorema. U ovom slučaju, pravac c je proizvoljni pravac paralelan s osima a i b.
Neka je pravac p takav da $p \perp a$, $p \perp b$, $p \perp c$ i neka je $p \cap a = \{A\}$, $p \cap b = \{B\}$, $p \cap c = \{C\}$.

Označimo sa s simetralu dužine $\overline{AC}$. Tada je $\sigma_s(a) = c$ te $\sigma_c \circ \sigma_s(a) = c$. Ako stavimo $\sigma_c \circ \sigma_s(b) = d$, tada imamo

$$\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_d \circ \sigma_c.$$

Ako označimo sa s_1 simetralu dužine $\overline{BC}$, tada je $\sigma_{s_1}(b) = c$ te $\sigma_c \circ \sigma_{s_1}(b) = c$. Ako stavimo $\sigma_c \circ \sigma_{s_1}(a) = d_1$, tada opet imamo

$$\sigma_c \circ \sigma_{d_1} = \sigma_b \circ \sigma_a.$$

Lako vidimo da translacija nema fiksnih točaka, osim u jednom slučaju.
Ako bi X bila fiksna točka translacije $\sigma_b \circ \sigma_a$, vrijedilo bi $\sigma_b \circ \sigma_a(X) = X$, tj.

$$\sigma_a(X) = X', \quad \sigma_b(X') = X,$$

a to bi značilo da $\overline{XX'}$ ima dvije simetrale, a i b, a to je u suprotnosti s Korolarom 2.3.4. Ako je $a = b$, tada translacija $\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \sigma_a = i$. U tom slučaju translacija je identiteta pa su sve točke translacije fiksne.

Teorem 3.7.4. *Svaka se translacija može prikazati kao kompozicija dvije centralne simetrije. Obratno, svaka kompozicija dvije centralne simetrije je translacija.*

Dokaz. Neka je $a \parallel b$, $p \perp b$. Prema Teoremu 2.3.13, tada $p \perp a$. Ako je $p \cap a = \{A\}$, $p \cap b = \{B\}$, imamo:

$$\sigma_b \circ \sigma_a = (\sigma_b \circ \sigma_p) \circ (\sigma_p \circ \sigma_a) = \sigma_B \circ \sigma_A.$$

Obratno, neka su A i B dvije proizvoljne točke. Neka je $p = AB$, a a i b su pravci okomiti na p koji sadrže redom točke A i B. Iz Teorema 2.3.14 tada slijedi $a \parallel b$ pa je

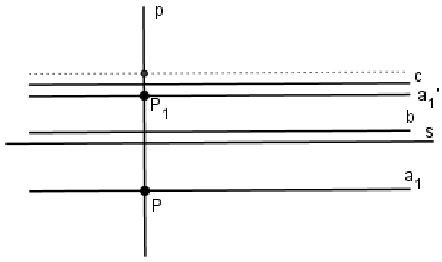
$$\sigma_B \circ \sigma_A = (\sigma_b \circ \sigma_p) \circ (\sigma_p \circ \sigma_a) = \sigma_b \circ \sigma_a.$$

□

Teorem 3.7.5. *Kompozicija triju osnih simetrija s paralelnim osima je osna simetrija. Njena os paralelna je s osima početne kompozicije.*

Dokaz. Neka je $a \parallel b \parallel c$ i neka je $p \perp a$. Tada, prema Teoremu 2.3.13, $p \perp b$ i $p \perp c$. Označimo $a \cap p = \{P\}$. Ako je $\sigma_c \circ \sigma_b(P) = P_1$, sa s označimo simetralu $\overline{PP_1}$. Kako je $p \perp b$ i $p \perp c$, to je i $P_1 \in p$, a to dalje povlači $s \perp p$. Označimo s a_1 jedan od polupravaca pravca a s početnom točkom P i označimo $\sigma_c \circ \sigma_b(a_1) = a_1'$. Tada je

$$\sigma_s \circ \sigma_c \circ \sigma_b(a_1) = a_1.$$



Slika 3.9: Dokaz Teorema 3.7.5

Na temelju Teorema 3.2.15, preslikavanje $\sigma_s \circ \sigma_c \circ \sigma_b$ je ili osna simetrija ili identiteta. Odakle, analognim postupkom kao u Teoremu 3.4.4, dobivamo

$$\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_s.$$

□

Teorem 3.7.6. *Kompozicija dvije translacije je translacija.*

Dokaz. Promatrajmo translacije

$$\sigma_b \circ \sigma_a \quad \text{i} \quad \sigma_d \circ \sigma_c.$$

Ako $b \parallel c$, tada je $a \parallel b \parallel c$ pa je, na temelju Teorema 3.7.5,

$$\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_p.$$

Dakle,

$$\sigma_d \circ \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_d \circ \sigma_p.$$

Iz tranzitivnosti slijedi $d \parallel p$ pa je $\sigma_d \circ \sigma_p$ translacija.
Ako $b \nparallel c$, tada postoji točka $b \cap c = \{T\}$. Označimo sa p okomicu na pravac b koja prolazi točkom T, a sa q okomicu na pravac c koja također prolazi točkom T i označimo $a \cap p = \{A\}$, $d \cap q = \{D\}$.

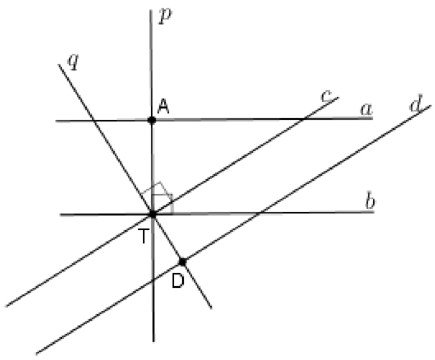
Tada je, na temelju Teorema 3.7.4,

$$\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_T \circ \sigma_A, \quad \sigma_d \circ \sigma_c = \sigma_D \circ \sigma_T,$$

pa je

$$\sigma_D \circ \sigma_T \circ \sigma_T \circ \sigma_A = \sigma_D \circ \sigma_A,$$

tj., prema Teoremu 3.7.4, $\sigma_D \circ \sigma_A$ je translacija. □



Slika 3.10: Dokaz Teorema 3.7.6

Teorem 3.7.7. *Kompozicija dvije rotacije s različitim centrima je ili rotacija ili translacija.*

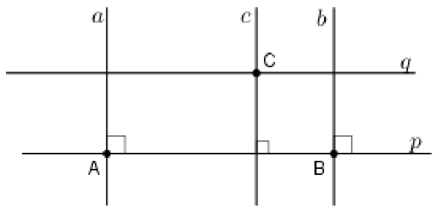
Dokaz. Neka je $a \cap c = \{A\}$ i $b \cap c = \{B\}$ i neka su $\sigma_c \circ \sigma_a$ i $\sigma_b \circ \sigma_c$ rotacije s centrima A, odnosno B.
Iz toga je

$$\sigma_b \circ \sigma_c \circ \sigma_c \circ \sigma_a = \sigma_b \circ \sigma_a.$$

Ako je $a \cap b = \{C\}$, tada je, prema definiciji rotacije, $\sigma_b \circ \sigma_a$ rotacija s centrom C.
Ako $a \parallel b$, tada je, prema definiciji translacije, $\sigma_b \circ \sigma_a$ translacija. □

Teorem 3.7.8. *Kompozicija tri centralne simetrije je centralna simetrija.*

Dokaz. Neka su σ_A, σ_B i σ_c centralne simetrije te neka je $p = AB$.
Pretpostavimo $C \notin p$. Označimo sa q pravac koji prolazi točkom C i paralelan je sa p. Nadalje, označimo, redom, s a, b i c okomice na p iz točaka A, B i C.



Slika 3.11: Dokaz Teorema 3.7.8

Prema Teoremu 2.3.13 tada je $a \perp q$, $b \perp q$, $c \perp q$. Iz definicije centralne simetrije tada slijedi:

$$\sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A = (\sigma_q \circ \sigma_c) \circ (\sigma_b \circ \sigma_p) \circ (\sigma_p \circ \sigma_a) =$$

$$= \sigma_q \circ \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a.$$

Kako je $a \parallel b \parallel c$, iz Teorema 3.7.5 slijedi $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_d$, gdje je $d \parallel a \parallel b \parallel c$ pa također vrijedi $d \perp p$ i $d \perp q$. Ako označimo $d \cap q = \{D\}$, tada imamo

$$\sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A = \sigma_q \circ \sigma_d = \sigma_D$$

i time smo dokazali tvrdnju za $C \notin p$.
U slučaju $C \in p$, dokaz provodimo na analogan način, osim u slučaju $d \cap q = \{D\}$ imamo $d \cap p = \{D\}$. □

Teorem 3.7.9. *Kompozicija translacije i centralne simetrije te centralne simetrije i translacije je centralna simetrija.*

Dokaz. Neka je $\sigma_b \circ \sigma_a$ translacija te neka je σ_C centralna simetrija.
Prema Teoremu 3.7.4 svaku translaciju možemo prikazati kao kompoziciju dvije centralne simetrije.
Neka je $\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_B \circ \sigma_A$. Tada imamo:

$$\sigma_C \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A.$$

Iz Teorema 3.7.8 slijedi

$$\sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A = \sigma_D.$$

Dakle, kompozicija translacije i centralne simetrije je centralna simetrija. Analognim postupkom dokazali bi tvrdnju da je kompozicija centralne simetrije i translacije centralna simetrija. □

Teorem 3.7.10. *Kompozicija translacije i rotacije te rotacije i translacije je rotacija.*

Dokaz. Neka je $\sigma_b \circ \sigma_a$ translacija, $\sigma_d \circ \sigma_c$ rotacija, $c \cap d = \{O\}$.
Neka je c_1 pravac paralelan s pravcem b koji prolazi točkom O. Tada, prema Teoremu 3.5.3, postoji pravac d_1 koji prolazi točkom O takav da vrijedi

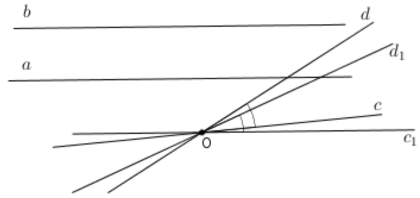
$$\sigma_d \circ \sigma_c = \sigma_{d_1} \circ \sigma_{c_1}.$$

Sada imamo:

$$(\sigma_d \circ \sigma_c) \circ (\sigma_b \circ \sigma_a) = (\sigma_{d_1} \circ \sigma_{c_1}) \circ (\sigma_b \circ \sigma_a).$$

Kako je $a \parallel b$ i $b \parallel c_1$, iz tranzitivnosti slijedi $a \parallel c_1$.
Prema Teoremu 3.7.5 slijedi

$$\sigma_{c_1} \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_p,$$



Slika 3.12: Dokaz Teorema 3.7.10

gdje je p pravac paralelan s pravcima c_1, b i a.
Sada vrijedi

$$(\sigma_d \circ \sigma_c) \circ (\sigma_b \circ \sigma_a) = \sigma_{d_1} \circ \sigma_{c_1} \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_{d_1} \circ \sigma_p.$$

Zbog $p \parallel c_1$ i $c_1 \cap d_1 = \{O\}$, prema Teoremu 2.3.12, slijedi da d_1 siječe i pravac p. Zbog toga zaključujemo da je $\sigma_{d_1} \circ \sigma_p$ rotacija.
Analognim postupkom dokazali bismo i da je kompozicija rotacije i translacije rotacija.

□

3.8 Klizna simetrija

U Teoremima 3.4.4 i 3.7.5 dokazali smo da je kompozicija triju osnih simetrija

$$\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$$

osna simetrija ako se pravci a, b i c sijeku u jednoj točki ili su međusobno paralelni. U daljnjem dijelu teksta ispitat ćemo preslikavanja u ostalim slučajevima.

Neka su u ravnini zadani pravci a, b, c takvi da barem dva od njih nisu paralelna i $a \cap b \cap c = \emptyset$. Neka je $b \cap c = \{A\}$. Označimo sa p okomicu na a koja prolazi točkom A. Na temelju Teorema 3.5.3, uvijek postoji pravac q takav da je $\sigma_c \circ \sigma_b = \sigma_q \circ \sigma_p$. Tada je $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_q \circ \sigma_p \circ \sigma_a$ te, ako stavimo $a \cap p = \{P\}$ i uzmemo u obzir da je $a \perp p$, imamo $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_q \circ \sigma_P$. Time smo dokazali:

Teorem 3.8.1. *Neka su pravci a, b i c takvi da barem dva od njih nisu paralelna i* $a \cap b \cap c = \emptyset$*. Tada je kompozicija* $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$ *kompozicija centralne i osne simetrije.*

Definicija 3.8.2. *Kompoziciju osne simetrije i translacije nazivamo kliznom simetrijom.*

Znamo da je centralna simetrija $\sigma_P = \sigma_m \circ \sigma_n$, gdje su m i n proizvoljni pravci takvi da $m \perp n$, $m \cap n = \{P\}$. Izaberemo li ih tako da

$$m \parallel q, \quad n \perp q, \quad n \cap q = \{Q\}, \tag{3.11}$$

tada je

$$\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_q \circ \sigma_P = \sigma_q \circ \sigma_m \circ \sigma_n.$$

Kako je $m \parallel q$, preslikavanje $\sigma_q \circ \sigma_m$ je translacija.

Na temelju prikazanog slijedi:

Teorem 3.8.3. *Neka su pravci a, b i c takvi da barem dva od njih nisu paralelna i $a \cap b \cap c = \emptyset$. Tada je kompozicija $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$ klizna simetrija.*

Dakle, kompozicija centralne i osne simetrije te kompozicija osne simetrije i translacije je klizna simetrija.

Promotrimo opet kompoziciju $\sigma_q \circ \sigma_m \circ \sigma_n$.
Na temelju asocijativnosti, (3.11) i Teorema 3.4.2 imamo:

$$\begin{aligned}(\sigma_q \circ \sigma_m) \circ \sigma_n &= \sigma_q \circ (\sigma_m \circ \sigma_n)\\ &= \sigma_q \circ (\sigma_n \circ \sigma_m) = (\sigma_q \circ \sigma_n) \circ \sigma_m\\ &= (\sigma_n \circ \sigma_q) \circ \sigma_m = \sigma_n \circ (\sigma_q \circ \sigma_m).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Time zaključujemo da je kompozicija osne simetrije i translacije jednaka kompoziciji translacije i osne simetrije pa je kompozicija translacije i osne simetrije također klizna simetrija.

Promotrimo opet i kompoziciju $\sigma_q \circ \sigma_P$.
Na temelju (3.11) i (3.12) imamo:

$$\sigma_q \circ \sigma_P = \sigma_q \circ \sigma_m \circ \sigma_n = \sigma_n \circ \sigma_q \circ \sigma_m,$$

te ako stavimo $n \cap q = \{Q\}$, imamo:

$$\sigma_q \circ \sigma_P = \sigma_Q \circ \sigma_m.$$

Time zaključujemo da je kompozicija centralne i osne simetrije jednaka kompoziciji osne i centralne simetrije pa je i kompozicija osne i centralne simetrije također klizna simetrija.

Na kraju ovog poglavlja prisjetimo se važnog Teorema 3.2.14 koji kaže da se svaka izometrija može prikazati kao kompozicija najviše tri osne simetrije. Na temelju tog teorema i definicija osne simetrije, rotacije, centralne simetrije, translacije i klizne simetrije te na temelju prikazanih rezultata u vezi tih izometrija možemo iskazati zaključni teorem:

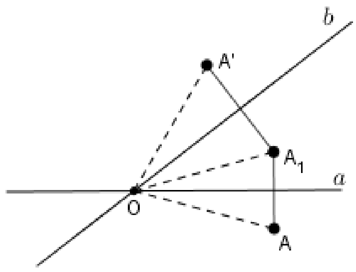
Teorem 3.8.4. *(Teorem o klasifikaciji izometrija u ravnini) Svaka izometrija u ravnini jedno je od ovih preslikavanja:*

- *identiteta*
- *osna simetrija*
- *rotacija*
- *centralna simetrija*
- *translacija*
- *klizna simetrija.*

Identiteta, rotacija, centralna simetrija i translacija direktne su izometrije, dok su osna simetrija i klizna simetrija indirektne izometrije.

Iako u Poglavlju 3 pojam rotacije, centralne simetrije i translacije nismo definirali kao što se definiraju u srednjoj školi, dane definicije iz Poglavlja 3 mogli bismo proučavati i na taj način. U ovom radu nećemo detaljnije o tome, ali u nastavku ćemo ukratko prokomentirati i usporediti navedene definicije.

Neka je $\sigma_b \circ \sigma_a$ kompozicija osnih simetrija i neka $a \cap b = \{O\}$, $\sigma_b \circ \sigma_a(A) = A'$. Tada je kompozicija $\sigma_b \circ \sigma_a$ rotacija oko točke O za kut $2\sphericalangle ab$.



Slika 3.13: Rotacija

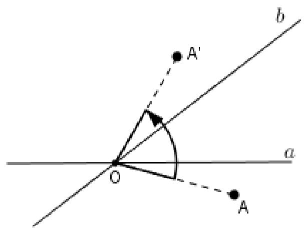
Zaista, promatrajući Sliku 3.13 i koristeći svojstva osne simetrije, lako vidimo

$$|OA| = |OA'| \quad \text{i} \quad |\sphericalangle AOA'| = 2|\sphericalangle ab|.$$

U ovom slučaju točku A rotirali smo u smjeru suprotnom od gibanja kazaljke na satu. Dogovorno uzimamo da je to pozitivan smjer rotacije.

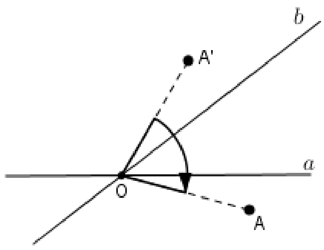
Promatrajmo sada kompoziciju $\sigma_a \circ \sigma_b$. Tada $\sigma_a \circ \sigma_b(A') = A$. Tada je također

$$|OA| = |OA'| \quad \text{i} \quad |\sphericalangle A'OA| = 2|\sphericalangle ab|.$$



Slika 3.14: Pozitivan smjer rotacije

Međutim, u ovom slučaju točku A' rotirali smo u smjeru gibanja kazaljke na satu. Dogovorno uzimamo da je to negativan smjer rotacije.



Slika 3.15: Negativan smjer rotacije

Dakle, kada je u pitanju definicija rotacije kao u srednjoj školi, važno je napomenuti smjer rotacije.

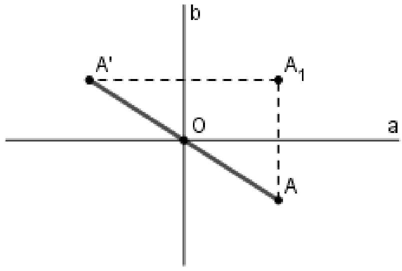
Centralna simetrija, kao što smo naveli u Poglavlju 3, specijalan je slučaj rotacije. U ovom slučaju možemo i reći da je to rotacija za kut od 180°.
Što se tiče definicije koja se pojavljuje u srednjoj školi, promatrajući kompoziciju $\sigma_b \circ \sigma_a$ pri čemu $a \perp b$, $a \cap b = \{O\}$, lako vidimo, pozivajući se na svojstva osne simetrije, da je

$$(A - O - A') \quad \text{i} \quad |OA| = |OA'|.$$

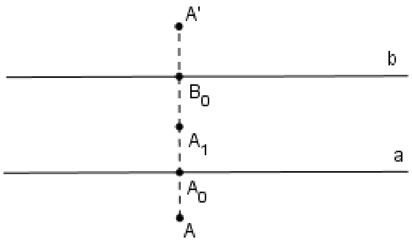
Nadalje, neka je kompozicija $\sigma_b \circ \sigma_a$ pri čemu $a \parallel b$, $\sigma_b \circ \sigma_a(A) = A'$. Tada je kompozicija $\sigma_b \circ \sigma_a$ translacija u smjeru pravca okomitog na pravce a i b i za udaljenost dva puta veću od udaljenosti zadanih osi.

Zaista, promatrajući Sliku 3.17 i koristeći svojstva osne simetrije, lako vidimo

$$|AA'| = 2|A_0B_0|, \quad \text{gdje je} \quad AA' \cap a = \{A_0\} \quad \text{i} \quad AA' \cap b = \{B_0\}.$$



Slika 3.16: Centralna simetrija



Slika 3.17: Translacija

Također, lako uočavamo da se točka A preslikala u točku A' u smjeru okomitom na pravce a i b.
Upravo taj smjer i udaljenost $2|A_0B_0|$ određuju orijeniranu dužinu (ili vektor) koja se pojavljuje u definiciji u srednjoj školi.

Dodatak A

Hilbertovi aksiomi

David Hilbert bio je njemački matematičar, priznat kao jedan od najutjecajnijih i najsvestranijih matematičara 19. i ranog 20. stoljeća. Izumio je i razvio velik broj fundamentalnih ideja u raznim prostorima, uključujući teoriju invarijantnosti i aksiomatizaciju geometrije. Formulirao je teoriju Hilbertovog prostora te prilagodio i branio Cantorovu teoriju skupova te teoriju beskonačnih brojeva. Poznat primjer njegovog rada u matematici je prezentacija u kojoj je predstavio zbirku od 23 neriješena problema koji su odredili daljnji smjer istraživanja u matematici u 20. stoljeću. Također je poznat kao jedan od začetnika teorije dokaza i matematičke logike. U tekstu "Osnove geometrije", koju objavljuje 1899. godine, predlaže tzv. Hilbertove aksiome kojima zamjenjuje Euklidove aksiome. Ti aksiomi ispravljaju nedostatke uočene kod Euklidovih aksioma. Hilbertov pristup značio je pomak prema modernoj aksiomatskoj metodi.

U Hilbertovoj aksiomatici euklidske geometrije osnovni objekti su: *točke*, *pravci* i *ravnine*. Točke označavamo velikim tiskanim slovima A, B, C,..., pravce označavamo malim tiskanim slovima a, b, c,..., dok ravnine označavamo grčkim slovima α, β, γ,...
Nadalje, osnovne relacije su: *relacija incidencije*, *relacija uređaja* i *relacija sukladnosti*. Dakle, možemo reći da u Hilbertovoj aksiomatici euklidske geometrije koristimo 6 osnovnih pojmova: tri osnovna objekta i tri osnovne relacije. Osnovni pojmovi se ne definiraju, već su opisani aksiomima. Postoji 20 aksioma opisanih u pet grupa:

(I) - aksiomi incidencije $\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_8$

(II) - aksiomi uređaja $\mathrm{II}_1 - \mathrm{II}_4$

(III) - aksiomi sukladnosti $\mathrm{III}_1 - \mathrm{III}_5$

(IV) - aksiomi neprekidnosti $\mathrm{IV}_1 - \mathrm{IV}_2$

(V) - aksiom paralelnosti V_E

Aksiomi incidencije su:

I_1 *Za svake dvije točke A i B postoji pravac a koji je incidentan i s točkom A i s točkom B.*

I_2 *Za svake dvije točke A i B postoji najviše jedan pravac koji je incidentan sa svakom od točaka A i B.*

I_3 *Za svaki pravac postoje barem dvije točke koje su s njim incidentne. Postoje barem tri točke koje nisu incidentne s istim pravcem.*

I_4 *Za svake tri točke A, B, C koje nisu incidentne s istim pravcem, postoji ravnina koja je incidentna sa svakom od točaka A, B, C. Svakoj ravnini incidentna je barem jedna točka.*

I_5 *Za svake tri točke A, B, C koje nisu incidentne s istim pravcem, postoji najviše jedna ravnina koja je incidentna sa svakom od tih točaka.*

I_6 *Ako su dvije točke pravca a incidentne s ravninom α, onda je svaka točka pravca a incidentna s ravninom α.*

I_7 *Ako postoji jedna točka koja je incidentna i s ravninom α i s ravninom β, onda postoji barem još jedna točka koja je incidentna i s ravninom α i s ravninom β.*

I_8 *Postoje barem četiri točke koje nisu incidentne s istom ravninom.*

Za pravac a koji je incidentan s točkom A još možemo reći da pravac a sadrži točku A ili da točka A leži na pravcu a. Tada pišemo: $A \in a$.
Neka su A, B, C točke u ravnini. Ako postoji pravac p za koji $A \in p$, $B \in p$, $C \in p$, tada kažemo da su točke A, B i C kolinearne. Ako takav pravac ne postoji, tada su točke A, B i C nekolinearne.
Činjenicu da je točka C između točaka A i B zapisujemo ovako: $(A - C - B)$.

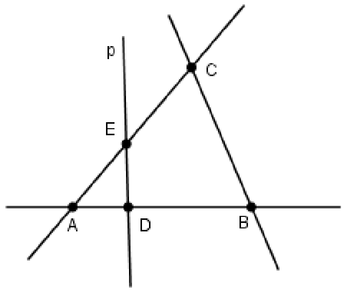
Aksiomi uređaja su:

II_1 *Ako je $(A-B-C)$, A, B i C su tri različite kolinearne točke i također vrijedi $(C-B-A)$.*

II_2 *Ako su A i B dvije različite točke, onda postoji točka C takva da je $(A - B - C)$.*

II_3 *Od tri različite točke jednog pravca najviše jedna je između preostalih dviju.*

II_4 *Neka su A, B, C tri nekolinearne točke, a pravac p takav da $A, B, C \notin p$. Ako postoji točka D takva da $D \in p$ i $(A - D - B)$, tada postoji i točka E koja je incidentna s pravcem p i $(A - E - C)$ ili $(B - E - C)$.*



Slika A.1: Aksiom II_4

Također vrijedi:

(i) $(A - P_1 - B) \wedge (A - P_2 - P_1) \Rightarrow (A - P_2 - B)$,

(ii) $(A - B - C) \wedge (A - C - D) \Rightarrow (B - C - D)$,

(iii) $(A - B - C) \wedge (B - C - D) \Rightarrow (A - B - D)$.

Točka Q je s iste strane točke O s koje je i točka P ako $\neg(P - O - Q)$.
Svaka točka O pravca p dijeli skup svih točaka pravca p različitih od O u dvije klase tako da svake dvije točke iz iste klase leže s iste strane točke O, a svake dvije točke iz različitih klasa leže s različitih strana točke O. Te dvije klase s uključenom točkom O nazivaju se *polupravcima* pravca p s početkom u točki O. U daljnjem tekstu s a^* označavat ćemo polupravac s početkom u točki O koji dopunjuje polupravac a s početkom u točki O do pravca p, tj.

$$p = O \cup a \cup a^*.$$

Točka Q je s iste strane pravca a s koje je i točka P ako vrijedi:

(i) $PQ \cap a = \emptyset$ ili

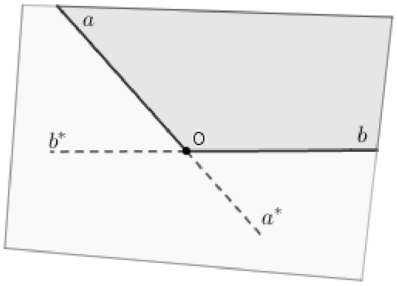
(ii) $PQ \cap a = \{R\}$ i $\neg(P - R - Q)$.

Svaki pravac p ravnine α dijeli sve točke te ravnine koje ne leže na pravcu p na dvije klase tako da su svake dvije točke iz iste klase s iste strane pravca p, a svake dvije točke iz različitih klasa su s različitih strana pravca p. Te dvije klase s uključenim pravcem p nazivaju se *poluravninama* ravnine α s rubom p.

Neka je dan $\sphericalangle aOb$. Dopunimo polupravce a i b do pravaca polupravcima a^* i b^* s početkom u točki O. Te pravce označavamo s aOa^* i bOb^*. Sve točke ravnine koja prolazi tim pravcima, različite od O i koje ne leže na polupravcima a i b podijeljene su kutom aOb na dva područja:

a) sve točke koje leže s iste strane pravca aOa^* kao i b, a ujedno leže i s iste strane pravca bOb^* kao i a pripadaju unutarnjem području kuta $\sphericalangle ab$;

b) sve ostale točke ravnine pripadaju vanjskom području kuta $\sphericalangle ab$.



Slika A.2: Unutarnje i vanjsko područje kuta $\sphericalangle ab$

Neka su a, b i c tri polupravca s istim početkom O. Ako c pripada unutarnjem području kuta $\sphericalangle ab$, onda kažemo da polupravac c leži između polupravaca a i b i pišemo $(a - c - b)$ ili $(b - c - a)$.

Aksiomi sukladnosti su:

III$_1$ *Za svaki polupravac a' s početnom točkom A' i za svaku dužinu $\overline{AB}$ postoji točka $B' \in a'$ takva da je dužina $\overline{AB}$ sukladna s dužinom $\overline{A'B'}$. To zapisujemo: $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.*

III$_2$ $(\overline{A'B'} \cong \overline{AB} \wedge \overline{A''B''} \cong \overline{AB}) \Rightarrow \overline{A'B'} \cong \overline{A''B''}$.

III$_3$ *Ako je $(A - B - C)$ i $(A' - B' - C')$ i ako je $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ i $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, onda je i $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.*

III$_4$ *Za svaku poluravninu α' s rubnim pravcem p', za svaki polupravac $a' \subset p'$ s početnom točkom O', za svaki $\sphericalangle ab$, postoji jedan i samo jedan polupravac $b' \subset \alpha'$ s početnom točkom O' takav da je $\sphericalangle ab$ sukladan s $\sphericalangle a'b'$. To zapisujemo: $\sphericalangle ab \cong \sphericalangle a'b'$.*

III$_5$ *Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ trokuti. Ako je $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C'A'B'$, onda je i $\sphericalangle CBA \cong \sphericalangle C'B'A'$.*

Aksiomi neprekidnosti su:

IV$_1$ *(Arhimedov aksiom) Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ bilo koje dužine i neka su na polupravcu AB, s početkom u točki A, odabrane točke A_1, A_2, A_3, ... tako da vrijedi*

$$(A - A_1 - A_2),\ (A_1 - A_2 - A_3),\ (A_2 - A_3 - A_4),\ \ldots$$

i

$$\overline{AA_1} \cong \overline{A_1A_2} \cong \cdots \cong \overline{CD}.$$

Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $B = A_n$ ili $(A_n - B - A_{n+1})$.

IV$_2$ *(Cantorov aksiom) Neka je dan beskonačan niz dužina takvih da je svaka dužina sadržana u prethodnoj i ne postoji dužina sadržana u svim dužinama niza. Tada postoji točka koja je sadržana u svim dužinama tog niza.*

Aksiom paralelnosti glasi:

V$_E$ *Za svaki pravac a i svaku točku $A \notin a$ postoji jedan i samo jedan pravac koji sadrži točku A, a ne siječe pravac a.*

Bibliografija

[1] *David Hilbert*, https://en.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert, posjećena 2018-02-04.

[2] *Hilbert's axioms*, https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_axioms, posjećena 2017-09-11.

[3] Dakić B. i Elezović N., *Matematika 1*, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazije, 2. dio, Element, Zagreb, 2006.

[4] ______, *Matematika 1*, dodatak za 1. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, Element, Zagreb, 2009.

[5] Paić G., Bošnjak Ž. i Čulina B., *Matematički izazovi 8*, udžbenik sa zbirkom zadataka za osmi razred, drugi dio, Alfa d.d., Zagreb, 2014.

[6] Matić I., Kuliš M. i Antunović Piton B, *Matematika 5*, udžbenik sa zbirkom zadataka u petom razredu osnovne škole, 2. dio, Školska knjiga, Zagreb, 2014.

[7] D. Ilišević i M. Bombardelli, *Elementarna geometrija, skripta*, 2007, https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf, posjećena 2017-10-12.

[8] Kurnik M., Pavković B. i Zorić Ž., *Matematika 1*, udžbenik za 1. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, 2. dio, Školska knjiga, Zagreb, 2007.

[9] D. Palman, *Planimetrija*, Element, Zagreb, 1999.

[10] B. Pavković i D. Veljan, *Elementarna matematika I*, Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.

[11] M. Prvanović, *Osnovi geometrije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1980.

[12] F. Rothe, *Several Topics from Geometry*, 2017, https://math2.uncc.edu/~frothe/3181all.pdf, posjećena 2018-02-12.

[13] Rodiger T., Havranek Bijuković L., Matić I., Antunović Piton B. i Djaković T., *Matematika 8*, udžbenik sa zbirkom zadataka u osmom razredu osnovne škole, 2. dio, Školska knjiga, Zagreb, 2014.

[14] B. Červar, G. Erceg i I. Lekić, *Osnove geometrije*, 2013, `http://mapmf.pmfst.unist.hr/~gorerc/OG-materijali/OG-13-14.pdf`, posjećena 2017-09-07.

[15] I.M. Yaglom, *Geometric Transformations*, MAA, 1962.

[16] Šikić Z., Draženović Žitko V., Marić M. i Krnić L., *Matematika 6*, udžbenik i zbirka zadataka za 6. razred osnovne škole, 1. polugodište, Profil, Zagreb, 2014.

Sažetak

Sukladnost i izometrije poznati su pojmovi još od osnovne i srednje škole. U školi se sukladnost trokuta uglavnom definira pomoću jednakosti duljina stranica i mjera kutova. U ovom radu tim pojmovima pristupamo koristeći Hilbertov sustav aksioma. Sukladnost trokuta i drugih likova definiramo koristeći izometrije. Time želimo ukazati na povezanost tih dvaju pojmova jer se u srednjoj školi nakon obrade izometrija ne donosi jasan zaključak o njihovoj povezanosti.

Summary

Congruence and isometry are known concepts since primary and secondary school. In the school, congruent triangles are mostly defined by the equality of side lengths and measures of angles. In this work we approach to these concepts using the Hilbert's system of axioms. Triangle congruence and congruence of geometric shapes is defined using isometry. We want to point out the connection between these two terms because in high school after the isometry lesson there is no clear conclusion about their connection.

Životopis

Rođena sam 04. siječnja 1993. godine u Varaždinu. Pohađala sam Osnovnu školu Trnovec do 2007. godine. Iste godine nastavila sam svoje školovanje u Gospodarskoj školi Varaždin, smjer ekonomist. Iako sam odabrala smjer s vrlo slabim programom matematike, sve veći interes za matematiku, kao i želja za podučavanjem rezultirali su upisom Preddiplomskog sveučilišnog studija Matematika, nastavnički smjer na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu 2011. godine. Po završetku preddiplomskog studija, 2015. godine, upisala sam Diplomski sveučilišni studij Matematika, nastavnički smjer na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu.